

Detekce změny regrese a detekce změny rozdělení

M. Hušková, MFF UK Praha

Úvod

Cílem článku je vyložit základní principy konstrukce testů a podat přehled základních typů úloh, které jsou v anglicky psané literatuře nazývány "testing of constancy of regression relationship over time" a "change point problem".

Soustředíme se na jednodušší případy, kdy máme nezávislé náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n pozorované v po sobě jdoucích časových okamžicích $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ a X_i má distribuční funkci F_i , $i=1, \dots, n$.

Detekci změny regrese budeme rozumět úlohu testovat hypotézu

$$(1.1) \quad H_0 : \theta_1 = \dots = \theta_n \quad \text{proti} \quad H_1 : \exists_{m < n} \theta_1 = \dots = \theta_m \neq \theta_{m+1} = \dots = \theta_n,$$

kde vycházíme ze situace, že X_i má distribuční funkci $F(x - \xi_i \theta_i)$, $i=1, \dots, n$, $\xi_i = (c_{i1}, \dots, c_{ip})'$ je vektor regresních konstant, který známe, $\theta_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{ip})'$ je vektor neznámých parametrů, $i=1, \dots, n$.

Detekci změny rozdělení budeme rozumět úlohu testovat hypotézu

$$(1.2) \quad H_0 : F_1 = \dots = F_n \quad \text{proti} \quad H_1 : \exists_{m < n} F_1 = \dots = F_m \neq F_{m+1} = \dots = F_n.$$

Tedy hypotéza H_1 znamená, že až do určitého časového okamžiku $\tau \in (t_m, t_{m+1})$, který neznáme, se pozorování řídila jedním regresním modelem popsaným parametrem θ_1 a po něm dochází ke změně a pozorování se řídí jiným regresním modelem popsaným parametrem θ_{m+1} . Časový okamžik τ se nazývá bodem změny (change point). Podobně je tomu s hypotézou H_1' . Kromě verifikace platnosti hypotéz nás může zajímat odhad bodu změny τ (popř. m). Při některých speciálních úlohách jsou některé z hodnot parametrů známy.

Nyní si uvedeme některé modifikace zmíněných úloh. Při detekci změny regrese můžeme do hypotézy H_1 zahrnout i změnu měřítka (viz (3.1) dole). Další možnost je uvažovat v alternativě více než jednu změnu (t.j. existenci bodů změn $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_q$, $q > 1$). Dále změna hodnot parametrů může proběhnout náhle, což odpovídá (1.1), nebo může probíhat spojitě, s tím, že začne v okamžiku τ_1' , pak v časovém intervalu (τ_1', τ_2') změna pokračuje (jde o jakýsi přechodný stav) a teprve v τ_2' se situace ustálí a sledované charakteristiky se už nemění.

Se všemi těmito úlohami se můžeme při aplikacích setkat. Uvedeme si aspoň některé z nich.

Při kontrole jakosti sledujeme ukazatele kvality výrobků a zajímá nás, zda došlo ke změně ukazatele či nikoli, a pokud ke změně došlo, co nejdříve ji odhalit (většinou sledujeme podíl vadných, např. Page (1955, 1957)).

Při sledování vývoje ekonomiky nás zajímá, zda došlo ke změně strukturálních parametrů či nikoli. Známé jsou aplikace v ekonomických časových řadách (Hsu (1979)), vývoj nezaměstnanosti v Německu, vývoj cen na trhu (Deshayes a Picard (1986)). Dále jsou známy aplikace na hydrologické časové řady (Cobb (1978)), aplikace v biologii (změny chování zvířat - Dienske a Metz (1977)), vývoj stavu zvířat (Deshayes a Picard (1986)), v medicíně (detekce změny výsledků opakovaně prováděných vyšetření) a použití při rozpoznávání obrazců.

Pro řešení výše zformulovaných úloh (podobně jako u většiny statistických úloh) byly použity různé přístupy. V zásadě se dají rozdělit do několika skupin:

A. Sekvenční a nesekvenční přístup. Při sekvenčním přístupu vycházíme z posloupnosti nezávislých náhodných veličin $\{X_i\}_{j=1}^{\infty}$, pozorovaných v časových okamžicích $t_1 < t_2 < \dots$, X_i má distribuční funkci F_i . Zajímá nás, zda existuje m_0 přirozené takové, že $F_1 = \dots = F_{m_0} / F_{m_0+1} = \dots$. V tomto případě je rozsah výběru N náhodný a volba testového kritéria úzce souvisí s volbou pravidla o zastavení (ukončení) výběru (stopping rule). Je-li m_0 konečné, požadujeme, aby $N - m_0$ bylo co nejmenší (t.j. chceme odhalit změnu co nejdříve), je-li $m_0 = +\infty$ (tedy ke změně v konečném čase nedojde), pak by pravděpodobnost, že $N < +\infty$ měla být malá. Popis testů spolu s dalšími podrobnostmi lze najít v pracích Širjajeva (1963, 1978). V dalším se tímto obecným případem zabývat nebudeme.

Budeme se však zabývat tzv. kvazisekvenčními postupy, při kterých je předem pevně stanoven maximální možný počet pozorování n_0 . Po provedení i -tého ($i < n_0$) pozorování se na základě i pozorování (dosud provedených) rozhodneme buď pro platnost alternativní hypotézy H_1 (popř. H_1^0) a ukončíme výběr, nebo pro další pozorování. Provedeme-li však n_0 pozorování, rozhodneme se na základě n_0 pozorování pro H_0 nebo H_1 (popř. H_0^0 nebo H_1^0). Tyto postupy úzce souvisí s tzv. rekurzivními postupy založené na rekurzivních reziduích. Testová statistika je zadána rekurentně a v i -tém kroku její hodnotu spočteme z její hodnoty v $(i-1)$ ním kroku a X_i . Tyto postupy našly široké uplatnění v praxi.

Při nesekvenčním postupu není rozsah výběru náhodný. V tomto případě máme k dispozici výsledky všech n pozorování a chceme vědět, zda změna nastala a popř., kdy k ní došlo.

B. Bayesovský a nebayesovský přístup

Při nebayesovském přístupu považujeme bod změny τ za neznámou konstantu, zatímco při bayesovském považujeme τ za náhodnou veličinu popsanou rozděleními $P(\tau \in (t_m, t_{m+1})) = p_m$, $m=1, \dots, n-1$ a $p_n = P(\tau > t_n)$. Tohoto přístupu se využívá, pokud máme apriorní informaci, kdy může nastat změna.

C. Klasický a robustní přístup

Klasickým přístupem budeme rozumět případ, kdy se předpokládá znalost distribuční funkce F_i až na neznámé parametry a většinou se používá testová statistika odvozená metodou podílem věrohodností. Často se předpokládá, že X_i mají normální rozdělení a k sestavení testové statistiky se používají odhady získané metodou nejmenších čtverců.

Při robustním přístupu se předpokládá, že distribuční funkce F_i splňují nějaké podmínky regularity, ale jinak jsou neznámé. Při sestavování testové statistiky se používají tzv. robustní odhady (R-, M-odhady, U-statistiky), popř. statistiky Kolmogorova-Smirnovova typu.

Pochopitelně existují postupy, které jsou kombinací přístupů výše uvedených nebo které bychom těžko klasifikovali podle tohoto třídění.

Byla napsána celá řada přehledných článků, většinou zaměřených jen na určité typy přístupů a postupů. Patří mezi ně následující články: Zacks(1983), Shabun(1980), Schulze(1986), Heckl a Westlund(1985), Deshayes a Picard(1986), Hušková a Sen(1988), Wolfe a Schechtman(1984). Pravděpodobně největší popularitu získal článek Browna, Durbina a Evanse (1975).

Zbytek článku je členěn následovně. Paragraf 2 je věnován problému posunutí (tj. změna se projeví v posunutí). Je rozdělen do dvou částí. V první jsou pro případ nezávislých normálně rozdělených X_1, \dots, X_n vloženy základní typy testů (bayesovský, podílem věrohodnosti, CUSUM a MOSUM). V druhé části jsou pak jejich robustní analogie založené na pořadích a M-odhadech. Třetí paragraf je věnován detekci změny regrese a je členěn obdobně jako druhý. Čtvrtý paragraf obsahuje poznámky k postupům v předchozích paragrafech, o odhadech bodu změny a dalších testech.

2. Detekce změny posunutí

2.1 Testy při normálním rozdělení

Předpokládejme, že X_1, \dots, X_n jsou nezávislé náhodné veličiny, X_i má rozdělení $N(\theta_i, 1)$ $i=1, \dots, n$. V tomto případě lze formulovat jako úlohu (1.1) s $p=1$, $c_{11}=1$ nebo úlohu (1.2).

Bayesovské řešení problému (bod změny τ je náhodná veličina s rozdělením $P(\tau \in (t_m, t_{m+1})) = p_m$, $m=1, \dots, n-1$, $p_n = P(\tau > t_n)$) pro jednostrannou alternativu, t.j. pro úlohu

$$(2.1a) \quad H_0: \theta_1 = \dots = \theta_n = \theta_0 \text{ proti } H_1: \exists m < n \theta_0 = \theta_1 = \dots = \theta_m < \theta_{m+1} = \dots = \theta_n,$$

navrhli Chernoff a Zacks (1964) a Gardner (1969) pro dvoustrannou alternativu:

$$(2.1b) \quad H_0: \theta_1 = \dots = \theta_n = \theta_0 \text{ proti } H_1: \exists m < n \theta_0 = \theta_1 = \dots = \theta_m \neq \theta_{m+1} = \dots = \theta_n.$$

Pro jednostrannou alternativu (při rovnoměrném apriorním rozdělení τ t.j. ($p_m = 1/n$, $m=1, \dots, n$)) má testová statistika tvar

$$(2.2) \quad T_{n1} = \sum_{i=1}^{n-1} (i+1)(X_i - \theta_0) \quad \text{při } \theta_0 \text{ známém}$$

$$(2.3) \quad T_{n2} = \sum_{i=1}^{n-1} (i+1)(X_i - \bar{X}_n) \quad \text{při } \theta_0 \text{ neznámém,}$$

kde $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$. Obě statistiky mají při nulové i alternativní hypotéze normální rozdělení. Kritické oblasti s hladinou α mají tvar:

$$(2.4) \quad T_{n1} > \phi^{-1}(1-\alpha) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (i+1)^2 \right)^{1/2}$$

a

$$(2.5) \quad T_{n2} > \phi^{-1}(1-\alpha) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (i+1)^2 - \frac{(n+1)}{n^2} \left(\sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^2 \right) \right)^{1/2}$$

kde $\phi^{-1}(\cdot)$ je kvantilová funkce normovaného normálního rozdělení. Pro oboustrannou alternativu můžeme testovou statistiku vyjádřit následovně:

$$(2.6) \quad T_{n3} = \sum_{t=1}^{n-1} p_t \left(\sum_{j=t}^{n-1} (X_{j+1} - \bar{X}_n) \right)^2 = \\ = \sum_{t=1}^{n-1} p_t (n-t)^2 (\bar{X}_{n-t} - \bar{X}_n)^2,$$

kde $p_m = P(\tau \in (t_m, t_{m+1}))$, $m=1, \dots, n-1$ a

$$(2.7) \quad \bar{X}_{n-t} = (n-t)^{-1} \sum_{j=n-t+1}^n X_j.$$

Gardner (1969) odvodil přesné i asymptotické rozdělení T_{n3} při H_0 a ukázal, že $(n^2-1)^{-1} T_{n3}$ má asymptotické rozdělení jako $\sum_{k=1}^{n-1} 6U_k^2 (\pi k)^{-2}$, kde $\{U_k\}_{k=1}^{n-1}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením.

Metoda podílem věrohodnosti vede pro jednostrannou alternativu k testové statistice

$$(2.8) \quad T_{n4} = \max_{1 \leq t \leq n-1} \left\{ (\bar{X}_{n-t}^R - \bar{X}_t)(t(n-t)/n)^{1/2} \right\}$$

$$= \max_{1 \leq t \leq n-1} \left\{ - \sum_{i=1}^t (X_i - \bar{X}_n)(t(n-t)/n)^{-1/2} \right\}.$$

Pro oboustrannou alternativu Hawkins(1977) navrhl testovou statistiku.

$$(2.9) \quad T_{n5} = \max_{1 \leq t \leq n-1} \left\{ \left| \sum_{i=1}^t (X_i - \bar{X}_n) \right| (t(n-t)/n)^{-1/2} \right\}$$

a odvodil rekurentní vztahy pro rozdělení T_{n5} .

Velmi známý je rekurzivní postup zvaný CUSUM (cumulative sums of recursive reziduals). Při sestavování testových statistik se vychází z tzv. rekurzivních reziduí

$$(2.10) \quad W_k = \frac{X_k - X_{k-1}}{\sqrt{\text{var}(X_k - X_{k-1})}} = (X_k - \bar{X}_{k-1}) \sqrt{1-k^{-1}} \quad k=2,3,\dots,n,$$

která jsou nezávislá a všechna mají rozdělení $N(0,1)$. Z těchto veličin pak postupně počítáme

$$(2.11) \quad M_t = \sum_{r=2}^t W_r = M_{t-1} + W_t, \quad t=2,\dots,n,$$

$$M_1 = W_1 = 0.$$

Test pro jednostrannou alternativu (2.1. a) provádíme následovně: děláme postupně pozorování a po každém spočteme veličinu M_t ,

(2.12) je-li $M_t < d_{\alpha,c}^+(t)$ a $t < n$, děláme další pozorování,

je-li $M_t \geq d_{\alpha,c}^+(t)$, zamítneme H_0 a neděláme další pozorování, při $M_n < d_{\alpha,c}^+(t)$ přijmeme H_0 .

Zde $d_{\alpha,c}^+(t)$ jsou kritické hodnoty určené tak, aby

$$(2.13) \quad P(\exists 2 \leq t < n \quad M_t \geq d_{\alpha,c}^+(t) \mid H_0) = \alpha.$$

Pro oboustrannou alternativu postupně děláme pozorování a

(2.14) je-li $|M_t| < d_{\alpha,c}(t)$, a $t < n$, děláme další pozorování,

je-li $|M_t| \geq d_{\alpha,c}(t)$, zamítneme H_0 a neděláme další pozorování, při $|M_n| < d_{\alpha,c}(t)$ přijmeme H_0 .

Hodnoty $d_{\alpha,c}(t)$ jsou určeny tak, aby

$$(2.15) \quad P(\exists 2 \leq t < n \quad |M_t| \geq d_{\alpha,c}(t) \mid H_0) = \alpha$$

Hodnoty $d_{\alpha,c}(t)$ lze aproximovat následovně:

$$(2.16) \quad d_{\alpha,c}(t) \approx h_{\alpha} \sqrt{n-1} + 2 h_{\alpha} (t-1)(n-1)^{-1/2} \quad t=2,\dots,n,$$

kde h_{α} je určeno vztahem:

$$(2.17) \quad 1 - \phi(3 h_{\alpha}) + \phi(h_{\alpha}) \exp\{-2 h_{\alpha}^2\} = \alpha/2.$$

O dalších možnostech je poznámka v závěru paragrafu.

Dalším rekurzivním postupem je tzv. metoda MOSUM (moving sums of recursive reziduals). Postup se shoduje s CUSUM jen místo veličin M_t se používají veličiny

$$(2.18) \quad R_t = \sum_{j=t-G+1}^t W_j G^{-1/2}, \quad t = i+G,\dots,n,$$

kde G je dáno (Hackl doporučuje $5 \leq G \leq 20$) a místo kritických hodnot $d_{\alpha,c}^+(t)$ (popř. $d_{\alpha,c}(t)$ u dvoustranné alternativy) se použije $d_{\alpha,M}^+$ (popř. $d_{\alpha,M}$) odpovídající tomuto postupu.

Toto jsou nejpoužívanější testy pro problémy (2.1.a) a (2.1.b).

Pokud se týče kritických hodnot pro uvedené testy, nejjednodušší je situace pro bayesovské testy založené na π_1 a π_2 , neboť obě statistiky mají normální rozdělení

(kritické obory jsou popsány vzorci (2.4) a (2.5)). Pro T_{n3} je lepší využít asymptotické rozdělení. Pokud se týče testů založených na T_{n4} , T_{n5} lze použít Bonferroniho nerovnost a pak dostaneme kritickou oblast $(\bar{X}_t - \bar{X}_{n-t}^* \text{ má při } H_0 \text{ rozdělení } N(0, t^{-1} + (n-t)^{-1}))$.

$$(2.19) \quad T_{n4} > \phi^{-1}(1 - \alpha(n-1)^{-1})$$

$$(2.20) \quad T_{n5} > \phi^{-1}(1 - \alpha(2(n-1))^{-1}).$$

Další možnost je použít Šidákovu nerovnost, která dává kritickou oblast tvaru:

$$(2.21) \quad T_{n5} > \phi^{-1}((1 + (1 - \alpha)^{(n-1)})^{-1}/2).$$

Kritické nerovnosti se dají určit též na základě tzv. vylepšené Bonferroniho nerovnosti:

$$(2.22) \quad P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_{i+1} \cap A_i),$$

kde A_1, \dots, A_n jsou libovolné jevy (Worsley (1982)).

Pro výpočet kritických hodnot lze též použít limitní rozdělení při H_0 , pro které platí:

$$(2.23) \quad \mathcal{L}(\max_{1 \leq k \leq n} \{n^{-1/2} |\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X}_n)| g(k/N)\}) \rightarrow$$

$$\mathcal{L}(\sup_{t \in (0,1)} \{|B(t)| g(t)\}) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty,$$

kde $\{B(t), t \in (0,1)\}$ je Brownův most a g je nezáporná funkce na $(0,1)$ integrovatelná se čtvercem. Je vidět, že statistiky T_{n4} a T_{n5} nejsou příslušného tvaru ($\int_0^1 (u(1-u))^{-1} du = +\infty$). Je však možné použít buď test s kritickou oblastí

$$(2.24) \quad \max_{1 \leq k \leq n} \{n^{-1/2} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X}_n)\} > b_{\alpha}^+$$

pro jednostrannou alternativu, nebo

$$(2.25) \quad \max_{1 \leq k \leq n} \{n^{-1/2} |\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X}_n)| g(k/N)\} > b_{\alpha}(g)$$

pro oboustrannou, kde b_{α}^+ a $b_{\alpha}(g)$ jsou definovány vztahem

$$(2.26) \quad P(\sup_{t \in (0,1)} \{B(t)\} > b_{\alpha}^+) = \alpha$$

respektive

$$(2.27) \quad P(\sup_{t \in (0,1)} \{|B(t)| g(t)\} > b_{\alpha}(g)) = \alpha.$$

Tabulka hodnot b_{α}^+ a $b_{\alpha}(g)$, $g \equiv 1$ je připojena na konci článku.

Pro metodu CUSUM a oboustrannou alternativu je možné použít buď kritické hodnoty dané (2.16), nebo opět použít Bonferroniho nebo Šidákovu nerovnost, které dávají

$$(2.28) \quad d_{\alpha,c}^*(t) \approx \sqrt{t-1} \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2(n-1)}) \quad t=2, \dots, n$$

respektive

$$(2.29) \quad d_{\alpha,c}^*(t) \approx \sqrt{t-1} \phi^{-1}((1 + (1 - \alpha)^{(n-1)})^{-1}/2) \quad t=2, \dots, n.$$

Pro jednostrannou alternativu Bonferroniho nerovnost dává:

$$d_{\alpha,c}^*(t) \approx \sqrt{t-1} \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{n-1}).$$

Konečně lze využít limitní rozdělení. Při H_0 totiž platí

$$(2.30) \quad \mathcal{L}(\max_{2 \leq t \leq n} \{|M_t|\}) \rightarrow \mathcal{L}(\max_{0 \leq t \leq 1} \{|W(t)|\}),$$

kde $\{W(t), t \in (0,1)\}$ je normovaný Wienerův proces. Příslušné kritické hodnoty w_{α} a w_{α}^+ jsou definovány následovně:

$$(2.31) \quad P(\sup_{t \in (0,1)} \{|W(t)|\} > w_{\alpha}) = \alpha$$

respektive

$$(2.32) \quad P(\max_{t \in (0,1)} \{W(t)\} > w_{\alpha}^*) = \alpha.$$

Tabulky jsou na konci článku.

Pro metodu MOSIUM plyne z Bonferroniho a Šidákovy nerovnosti následující aproximace:

$$(2.33) \quad d_{\alpha, M}(t) \approx \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2(n-G)}\right) \quad t = 1+G, \dots, n$$

respektive

$$(2.34) \quad d_{\alpha, M}(t) \approx \phi^{-1}\left(\frac{(1+(1-\alpha)^{(n-G)^{-1}})}{2}\right), \quad t = 1+G, \dots, n.$$

Je nutné si uvědomit, že kritické hodnoty získané přes Bonferroniho a Šidákovu nerovnost vedou ke konzervativním testům (tj. skutečná hladina testu je nižší než α), ale simulace ukazují, že skutečné kritické hodnoty jsou sice menší, ale rozdíl je přijatelný (podrobněji viz Hackl (1980)).

Ve všech případech lze získat kritické hodnoty simulacemi.

Testy lze celkem snadno modifikovat na případ, kdy X_i mají rozdělení $N(\theta_i, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$ neznáme, stačí nahradit σ^2 odhadem, což vede ke změně rozdělení exaktního, ale ne limitního. Analogicky lze sestavit testy pro změnu rozptylu, popř. současně změny posunutí a rozptylu. Např. jsou-li X_1, \dots, X_n nezávislé, X_i má rozdělení $N(\theta_i, \sigma_i^2)$, $i=1, \dots, n$ a uvažujeme-li úlohu testovat hypotézu $H_0: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_n^2$ proti $H_1: \exists m < n \quad \sigma_1^2 = \dots = \sigma_m^2 \neq \sigma_{m+1}^2 = \dots = \sigma_n^2$, pak CUSUM test pro změnu rozptylu je založen na statistikách

$$t \sum_{r=2}^n w_r^2 (n-1)^{-1} \sum_{k=2}^n w_k^2, \quad t=2, \dots, n. \text{ Podrobnosti o těchto postupech lze najít v Hacklovi (1980).}$$

2.1 Robustní postupy

V tomto paragrafu budeme vycházet z předpokladu, že náhodné veličiny X_i jsou nezávislé, X_i má distribuční funkci $F(x-\theta_i)$ $i=1, \dots, n$. Budeme uvažovat jen dvoustrannou alternativu:

$$(2.35) \quad H_0: \theta_1 = \dots = \theta_n = \theta_0 \quad \text{proti} \quad H_1: \exists m < n \quad \theta_0 = \theta_1 = \dots = \theta_m \neq \theta_{m+1} = \dots, \theta_n.$$

Modifikace pro jednostrannou alternativu plyne z předchozího a postupů pro dvoustrannou alternativu. Při sestavování robustních testů pro tuto úlohu vycházeli autoři většinou z testů uvedených v předchozím paragrafu. Největší pozornost byla věnována testům založeným na pořadích.

Bayesovské testy založené na pořadí navrhl Bhattacharya a Johnson (1968). Pro případ θ_0 známého a F spojitě symetrické kolem 0 má testová charakteristika tvar

$$(2.36) \quad T_{n\theta} = \sum_{i=1}^n p_i \text{sign}(X_i - \theta_0) a_n^+(R_i^*) = \\ = \sum_{i=1}^n p_i \sum_{k=1}^i \text{sign}(X_k - \theta_0) a_n^+(R_k^*),$$

kde (p_1, \dots, p_n) je apriorní rozdělení náhodné veličiny τ (bod změny), $D_k = \sum_{i=k}^n p_i, i=1, \dots, n$, R_i^* je pořadí $|X_i - \theta_0|$ mezi $|X_1 - \theta_0|, \dots, |X_n - \theta_0|$ a $(a_n^+(1), \dots, a_n^+(n))$ je vektor skórovů užívaných pro test hypotézy symetrie. Za povšimnutí stojí fakt, že statistika $T_{n\theta}$ je lineární kombinací pořadových statistik pro test hypotézy symetrie při rozsahu výběru $i, i=1, \dots, n$. Často se používá test s $a_n^+(i)=1$ (tedy obdoba znaménkového testu). Pro případ θ_0 neznámého a F spojitě (ne nutně symetrické) navrhl autoři testovou statistiku

$$(2.37) \quad T_{n\tau} = \sum_{i=1}^n D_i a_n(R_i) = \sum_{i=1}^n p_i \sum_{k=1}^i a_n(R_k),$$

kde význam D_i a p_i je stejný jako u předchozího testu, R_i je pořadí X_i mezi X_1, \dots, X_n

$i=1, \dots, n$, $(a_n(1), \dots, a_n(n))$ je vektor skórá pro test hypotézy náhodnosti (tj. X_j , $j=1, \dots, n$ mají distribuční funkci $F(x-\theta_0)$ proti alternativě X_1, \dots, X_i mají distribuční funkci $F(x-\theta_0) \neq X_{i+1}, \dots, X_n$ mají distribuční funkci $F(x-\theta_n)$, $\theta_0 \neq \theta_n$). Optimální volby skórá se v obou případech shodují s optimální volbou pro test hypotézy symetrie popř. test hypotézy náhodnosti. Pokud se týče kritických hodnot (pro jednu i oboustrannou alternativu), stačí si uvědomit, že T_{n6} a T_{n7} jsou opět lineární pořadové statistiky a tedy lze použít kritické hodnoty pro příslušné pořadové testy založené na exaktním rozdělení nebo limitním rozdělení.

Vyjdeme-li z M-odhadů (při distr.f.f symetrické), můžeme sestavit následující bayesovské testové statistiky:

$$(2.38) \quad T_{n8} = \sum_{i=1}^n D_i \psi(x_i - \theta_0)$$

a

$$(2.39) \quad T_{n9} = \sum_{i=1}^n D_i \psi(x_i - \theta_n(\psi))$$

pro případ θ_0 známého respektive neznámého, kde $\theta_n(\psi)$ je M-odhad θ_0 generovaný funkcí ψ . ψ je monotonní lichá funkce splňující obvyklé požadavky. Pro nalezení kritických hodnot se obvykle využívá limitní rozdělení (obě testové statistiky mají při H_0 asymptoticky normální rozdělení s parametry $(0, \sum_{i=1}^n D_i^2 \int \psi^2(x) dF(x))$).

Maximálně věrohodnému přístupu zde odpovídá tzv. pseudodvouvýběrový pořadový test, jehož idea je zřejmá z testové statistiky:

$$(2.40) \quad T_{n10}(g) = \max_{2 \leq k \leq n} \left\{ \left| \sum_{i=1}^k (a_n(R_i) - \bar{a}_n) \right| g(k/n) \right\},$$

kde $a_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n a_n(i)$ a za g volili autoři:

$$(2.41) \quad g_1(k/n) = (\text{var}_{H_0} \left\{ \sum_{i=1}^k a_n(R_i) \right\})^{-1/2}, \quad k=2, \dots, n$$

(Sen, A. a Srivastava (1975)) nebo

$$(2.42) \quad g_2(k/n) = (\text{var}_{H_0} \left\{ \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_n(R_i) \right\})^{-1/2}, \quad k=2, \dots, n$$

(Pettit (1979)) nebo funkce tzv. U-tvaru $g(t) = (t(1-t))^{-\beta}$, $0 \leq \beta < 1/2$ (Sen, P.K. (1978)).

Kritické hodnoty lze nalézt buď simulacemi, nebo využitím limitního rozdělení, a to statistik $\sum_{i=1}^k (a_n(R_i) - \bar{a}_n) g(k/n)$, $k=2, \dots, n-1$ (pro $k \rightarrow \infty$ a $n-k \rightarrow \infty$ mají asymptoticky normální rozdělení) spolu s Bonferroniho nebo Šidákovou nerovností. Další možnost je použít tvrzení:

$$(2.43) \quad \mathcal{L}(T_{n10}(g)) \left(\sum_{i=1}^n (a_n(i) - a_n)^2 \right)^{-1/2} \\ \rightarrow \mathcal{L} \left(\sup_{t \in (0,1)} \left\{ |B(t)| g(t) \right\} \right) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty,$$

kde $\{B(t), t \in (0,1)\}$ je Brownův most a g nezáporná funkce na $(0,1)$ integrovatelná se čtvercem.

Zcela analogicky lze sestavit testy založené na M-odhadech. Testová statistika má tvar

$$(2.44) \quad T_{n11}(g) = \max_{2 \leq k \leq n} \left\{ \left| \sum_{i=1}^k \psi(x_i - \theta_n(\psi)) \right| g(k/n) \left\{ \sum_{i=1}^n \psi^2(x_i - \theta_n(\psi)) \right\}^{-1/2} \right\},$$

kde $\theta_n(\psi)$ je M-odhad založený na X_1, \dots, X_n generovaný funkcí ψ . Pokud se týče funkce g a kritických hodnot, platí totéž co pro pořadové testy.

Robustní postup odpovídající CUSUM metodě založený na M-odhadech vychází ze statistik

$$(2.45) \quad W_k^\psi = \sum_{i=1}^k \psi(x_i - \theta_{i-1}(\psi)) \quad k=2, \dots, n$$

$$(2.46) \quad \sigma_k^{\psi 2} = k^{-1} \sum_{i=1}^k \psi^2(x_i - \theta_{i-1}(\psi)) \quad k=2, \dots, n$$

$$(2.47) \quad M_k^\psi = W_k^\psi + M_{k-1}^\psi, \quad M_1^\psi = 0, \quad k=2, \dots, n$$

kde $\theta_{i-1}(\psi)$ je M-odhad založený na pozorováních x_1, \dots, x_{i-1} a generovaný funkcí ψ .

Veličina $\sigma_k^{\psi 2}$ je odhadem $\int \psi^2(x) dF(x)$. Test lze popsat následovně:

(2.48) je-li na k-tém kroku $n^{-1/2} |M_k^\psi| \sigma_k^{-1} \geq f_c(\alpha, k)$ $k \leq n$, pak zamítneme H_0 a neděláme další pozorování, je-li $n^{-1/2} |M_k^\psi| \sigma_k^{-1} < f_c(\alpha, k)$ a $k < n$, děláme další pozorování, je-li $k = n$ a $n^{-1/2} |M_k^\psi| \sigma_k^{-1} \geq f_c(\alpha, k)$ přijmeme H_0 , jinak H_0 zamítneme,

kde $f_c(\alpha, k)$ jsou kritické hodnoty odpovídající hladině α . Pro získání $f_c(\alpha, k)$ se dá využít, buď limitní rozdělení, neboť při H_0 (a splnění určitých podmínek regularity) platí:

$$(2.49) \quad \alpha \left(\max_{2 \leq k \leq n} \{ (n \sigma_k^{\psi 2})^{-1/2} |M_k^\psi| \} \right) \rightarrow \alpha \left(\sup_{t \in (0,1)} \{ |W(t)| \} \right) \text{ při } n \rightarrow \infty,$$

kde $\{W(t); t \in (0,1)\}$ je normovaný Wienerův proces. Další podrobnosti lze nalézt v Hušková (1988). Souvislost s CUSUM vyloženou v předchozím paragrafu je vidět, položíme-li $\psi(x) = x$ a $\theta_k(\psi) = \bar{x}_k$ (pozor v 2.1 jsme znali $\text{var}(X_k - \bar{x}_{k-1}) = \sigma^2(k-1/k)$).

Zcela analogicky lze definovat robustní verzi MOSUM. Pokud se týče kritických hodnot, lze použít Bonferroniho nebo Šidákovu nerovnost, ale v tom případě potřebujeme G dost velké (kvůli asymptotické normalitě).

Z výpočetního hlediska je vhodnější v robustních verzích CUSUM a MOSUM použít místo M-odhadů (ty se totiž počítají pomocí iteračních metod) tzv. rekurzivní M-odhady nebo jednokrokové rekurzivní M-odhady. Rekurzivní M-odhady jsou definovány následovně:

$$(2.50) \quad \theta_i^0(\psi) = \theta_{i-1}^0(\psi) + (i \gamma_i^0)^{-1} \psi(x_i - \theta_{i-1}^0(\psi)) \quad i=2, \dots, n,$$

$$(2.51) \quad \gamma_i^0 = (2ti)^{-1} \sum_{j=1}^i (\psi(x_j - \theta_{j-1}^0(\psi)) + tj^{-\beta}) - \psi(x_j - \theta_{j-1}^0(\psi) - tj^{-\beta}) \Big|_j^\beta$$

kde $\theta_1^0(\psi)$ je rozumný počáteční odhad, $0 < \beta \leq 1/2$, $t \neq 0$ pevné.

Jednokrokový rekurzivní M-odhad je definován následovně

$$(2.52) \quad \theta_i^\psi(\psi) = \theta_{i-1}^\psi(\psi) + (i \gamma_i^\psi)^{-1} \sum_{j=1}^i (x_j - \theta_{j-1}^\psi(\psi)) \quad i=2, \dots, n$$

$$(2.53) \quad \gamma_i^\psi = \frac{1}{2t\Gamma} \sum_{j=1}^i (\psi(x_j - \theta_{j-1}^\psi(\psi)) + ti^{-1/2}) - \psi(x_j - \theta_{j-1}^\psi(\psi) - ti^{-1/2}),$$

kde $t \neq 0$, $\theta_1^\psi(\psi)$ je rozumný počáteční odhad. Veličiny γ_i^0 a γ_i^ψ jsou odhadem $\partial/\partial a (S \psi(x-a) dF(x))$.

V obou případech je nutné γ_i^0 a γ_i^ψ při výpočtu modifikovat (ofezávat). Podrobněji se lze s těmito odhady seznámit v literatuře o rekurzivních odhadech nebo stochastických aproximacích (např. Novovičová (1984), Hušková (1988)). Pokud se týče volby skórové funkce ψ , platí pro ni stejné doporučení jako u M-odhadů parametru posunutí. Podrobnější poznámku nalezneme čtenář na konci 3.2.

3. Detekce změny regrese

3.1 Postupy pro normální rozdělení

Předpokládejme, že X_1, \dots, X_n jsou nezávislé náhodné veličiny, X_i má normální rozdělení $N(\beta_i, \sigma_i^2)$ $i=1, \dots, n$.

Nejprve se zmíníme o různých modifikacích. Za právě uvedených předpokladů lze dále uvažovat úlohu (1.1) při $\sigma_i^2 = \sigma^2$, $i=1, \dots, n$ (σ^2 známé nebo neznámé) nebo studovat obecnější úlohu:

$$(3.1) \quad H_0: (\beta_1, \sigma_1^2) = \dots = (\beta_n, \sigma_n^2) \text{ proti}$$

$$H_1: \exists m < n (\beta_1, \sigma_1^2) = \dots = (\beta_m, \sigma_m^2) \neq (\beta_{m+1}, \sigma_{m+1}^2) = \dots = (\beta_n, \sigma_n^2).$$

Další možnost je uvažovat jen změnu rozptylu (tj. $\beta_1 = \dots = \beta_n$ platí i při alternativě). Zde se soustředíme na úlohu (1.1). Informace o ostatních lze nalézt v Hacklovi (1980).

Dále se někdy místo úlohy (1.1) uvažuje úloha nazývaná "time-trending regression" formulovaná jako diskriminace mezi hypotézami:

$$(3.2) \quad H(0) : E X_i = \beta_i \beta(0) \quad \forall i$$

$$H(1) : E X_i = \beta_i (\beta(0) + \beta(1)t_i) \quad \forall i$$

$$H(g) : E X_i = \beta_i (\beta(0) + \beta(1)t_i + \dots + \beta(g)t_i^g) \quad \forall i.$$

kde všechna $\beta(v)$, ($v=1, \dots, g$) jsou p -rozměrné vektory, $t_1 < t_2 < \dots$ jsou časové okamžiky, kdy se provádějí pozorování. Informace o úlohách tohoto typu lze nalézt např. v Fanley, Hinich (1970). Při úloze (1.1) někdy předpokládáme, že v alternativě $E X_i = h(t_i)$, $i=1, \dots, n$ kde h je nějaká funkce, a rozlišujeme, zda jde o změnu skokem ("abrupt change") nebo o spojitou změnu (t.j., zdali má $h(t)$ v bodě změny skok nebo je spojitá). Informace o tomto přístupu lze nalézt např. v Hawkins (1980).

Bayesovská řešení problému lze nalézt např. v Ferreira (1975), Estøby a El Shaarawi (1981) a Choy a Broemling (1980). Testy jsou analogií bayesovských testů popsaných v 2.1. Autofi se však více soustřeďují na odhady než na testování.

Test podílem věrohodnosti pro úlohu (3.1) dává testovou statistiku (nazývanou Quandtovou):

$$(3.3) \quad \max_{p < m < n-p} \left\{ \frac{1}{2} (-m \ln \hat{\sigma}_m^2 - (n-m) \ln \hat{\sigma}_{n-m}^2 + n \ln \hat{\sigma}_n^2) \right\},$$

kde $\hat{\sigma}_m^2$, $\hat{\sigma}_{n-m}^2$, $\hat{\sigma}_n^2$ jsou maximálně věrohodné odhady σ^2 odpovídající pozorováním (X_1, \dots, X_m) , (X_{m+1}, \dots, X_n) , respektive (X_1, \dots, X_n) . Problém je nalézt kritické hodnoty. Lepší je situace pro případ $\sigma^2 = \sigma_i^2$, $i=1, \dots, n$, známé. Hawkins (1977) a Worsley (1983) ukázali, že metoda podílem věrohodnosti vede k testové statistice

$$(3.4) \quad \max_{p < k < n-p} \{V_{n,k}\}$$

$$(3.5) \quad V_{n,k} = (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_{n-k})' (C_k^{-1} + C_{n-k}^{-1}) (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_{n-k}) \frac{1}{\sigma^2} \\ = (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_n)' (C_k^{-1} - C_n^{-1})^{-1} (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_n) \frac{1}{\sigma^2}$$

kde $\hat{\beta}_k$ a $\hat{\beta}_{n-k}$ jsou odhady β metodou nejmenších čtverců založené na (X_1, \dots, X_k) respektive (X_{k+1}, \dots, X_n) a $C_k = \sum_{i=1}^k c_i c_i'$, $C_{n-k} = \sum_{i=k+1}^n c_i c_i'$, $k=1, \dots, n$.

Odhady $\hat{\beta}_k$ a $\hat{\beta}_{n-k}$ jsou nezávislé, mají normální rozdělení, $\text{var}(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_{n-k}) = \sigma^2 (C_k^{-1} + C_{n-k}^{-1})$ a $\text{var}(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_n) = (C_k^{-1} - C_n^{-1}) \sigma^2$.

Bonferroniho nerovnost pak vede ke kritické hodnotě $\chi^2_{\alpha^*}(p)$, kde $\alpha^* = \alpha(n-2p)^{-1}$ a $\chi^2_{\alpha^*}(p)$ je 100 α^* % kritická hodnota χ^2 rozdělení o p st.v. Za předpokladů, že

$$(3.6) \quad n^{-1} \sum_{j=1}^n c_{[nsj]} \rightarrow s \zeta \quad \text{pro } n \rightarrow \infty, s \in (0,1)$$

$$(3.7) \quad n^{-1} \sum_{i=1}^n c_{ij} = O(1) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty, j=1, \dots, p$$

$$(3.8) \quad \max_{1 \leq i \leq n} \{c_{ij}^4\} n^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty, j=1, \dots, p,$$

kde ζ je pozitivně definitní matice, platí

$$(3.9) \quad \alpha \left(\max_{p < k < n-p} \{V_{n,k} g(k/n)k(n-k)/n^2\} \right) \\ \rightarrow \alpha \left(\sup_{t \in (0,1)} \{B_p^\alpha(t)g(t)\} \right) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty,$$

$$\text{kde } \{B_p^\alpha(t) = \sum_{i=1}^p B_i^2(t), t \in (0,1)\}, \{B_i(t), t \in (0,1)\}$$

$i=1, \dots, p$ jsou nezávislé Brownovy mosty, g je nezáporná funkce na $(0,1)$ integrovatelná se čtvercem. Chceme-li tedy využít limitní rozdělení, pak bychom měli použít test s kritickým oborem

$$(3.10) \quad \max_{p < k < n-p} \{V_{n,k} k(n-k)/n^2\} > b_{\alpha,p}^*$$

popř. asymptoticky ekvivalentní test s kritickým oborem

$$(3.11) \quad \max_{p < k < n-p} \{(\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_n)' \zeta_k^{-1} \zeta_n^{-1} \zeta_k (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_n) \sigma^{-2}\} > b_{\alpha,p}^*,$$

kde $b_{\alpha,p}^*(p)$ je definováno následovně:

$$(3.12) \quad P(\sup_{t \in (0,1)} \{B^\alpha(t)\} > b_{\alpha,p}^*) = \alpha.$$

Tabulky $b_{\alpha,p}^*(p)$ jsou v tabulce na konci článku.

Metoda CUSUM (vyložena pro případy posunutí v 2.1) je asi nejznámější. Vychází z rekurzivních reziduí:

$$(3.13) \quad W_k = \frac{X_k - \zeta_k \hat{\theta}_{k-1}}{\text{var}(X_k - \zeta_k \hat{\theta}_{k-1})} \\ = \frac{X_k - \zeta_k \zeta_{k-1}^{-1} (\zeta_1, \dots, \zeta_{k-1}) X_{k-1}}{\sigma^2 (1 + \zeta_k \zeta_{k-1}^{-1} \zeta_k)} \quad k=p+1, \dots, n.$$

Pro výpočet $\hat{\theta}_k$ a ζ_k^{-1} lze použít následující rekurentní vzorce:

$$\zeta_k^{-1} = \zeta_{k-1}^{-1} - \frac{\zeta_{k-1}^{-1} \zeta_k \zeta_k^{-1} \zeta_{k-1}^{-1}}{1 + \zeta_k \zeta_{k-1}^{-1} \zeta_k} \\ \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \zeta_k^{-1} \zeta_k (X_k - \zeta_k \hat{\theta}_{k-1})$$

Z rekurzivních reziduí počítáme postupně

$$(3.14) \quad M_t = M_{t-1} + W_t \quad t = p+1, \dots, n$$

$W_p = 0$ a test provádíme dle (2.14) přičemž za M_t a W_t dosazujeme z (3.14) a (3.13). Kritické hodnoty lze aproximovat stejně jako pro posunutí (tj. dle (2.28) nebo (2.29) nebo (2.16)).

Metoda MOSUM pro regresní model se shoduje s MOSUM pro posunutí, přičemž do (2.18) dosazujeme za W_j z (3.13). Další podrobnosti lze nalézt v Hacklovi (1980).

3.2 Robustní přístup

V tomto paragrafu budeme uvažovat problém (1.1), přičemž budeme předpokládat, že distribuční funkce F splňuje nějaké podmínky regularity (obvykle konečnost Fisherovy informace) a jinak je neznámá a pro limitní rozdělení platnost (3.6-3.8). Uvedeme si zde testy založené na M -odhadech, které jsou "odvozeny" z testů uvedených v předchozím paragrafu. (Testy založené na pořadích jsou příliš komplikované a pro praktické využití nejsou atraktivní).

Vyjdeme-li z testu (3.4-3.5) (tj. z testu podílem věrohodností), pak můžeme zkonstruovat robustní testy založené na statistice (všechny jsou asymptoticky ekvivalentní)

$$(3.15) \max_{p < k < n-p} \{Z_{n,k}^{(i)}\}$$

kde za $Z_{n,k}$ lze dosadit např. jednu z následujících statistik

$$(3.16) Z_{n,k}^{(1)} = (\hat{g}_k(\psi) - \hat{g}_n(\psi))' C_k^{-1} C_n^{-1} C_k (\hat{g}_k(\psi) - \hat{g}_n(\psi)) \hat{\sigma}^{-2},$$

$$(3.17) Z_{n,k}^{(2)} = \left(\sum_{i=1}^k c_i \psi(x_i - g_i \hat{g}_n(\psi)) \right)' C_n^{-1} \left(\sum_{i=1}^k c_i \psi(x_i - g_i \hat{g}_n(\psi)) \right) \hat{\sigma}^{-2},$$

pro $p < k < n-p$, kde $\hat{g}_k(\psi)$ je M -odhad generovaný funkcí ψ založený na x_1, \dots, x_k a

$$(3.18) \hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n \psi^2(x_i - g_i \hat{g}_n(\psi)),$$

což je odhad $\int \psi^2(x) dF(x)$. Jestliže platí (3.6-3.8) a ψ je lichá monotónní s ohraničenou první derivací, pak při H_0

$$(3.19) \mathcal{L}(\max_{p < k < n-p} \{Z_{n,k}^{(i)}\}) \rightarrow \mathcal{L}(\sup_{t \in (0,1)} \{B_p^{\#}(t)\}) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty,$$

$i=1,2$, kde $\{B_p^{\#}(t), t \in (0,1)\}$ je proces popsáný pod (3.9). Povšimněte si, že pro

$\psi(x)=x$, je-li $\hat{g}_k(\psi)$ odhad metodou nejmenších čtverců a $g(k/n)=1$, pak

$\max_{p < k < n-p} \{V_{n,k}^{(i)}\}$ je asymptoticky ekvivalentní statistice (3.15) ($V_{n,k}$ je def. (3.4)).

Využijeme-li (3.19), pak hypotézu H_0 v (1.1) zamítneme, jestliže

$$(3.20) \max_{p < k < n-p} \{Z_{n,k}^{(i)}\} > b_{\alpha,p}^{\#},$$

$i=1,2$, kde $b_{\alpha,p}^{\#}$ je definováno (3.12) (příslušné tabulky jsou na konci článku). Uvědomíme-li si, že $U_k = (\hat{g}_k(\psi) - \hat{g}_{n-k}(\psi))' (C_k^{-1} + C_{n-k}^{-1})^{-1} (\hat{g}_k(\psi) - \hat{g}_{n-k}(\psi)) \hat{\sigma}^{-2}$ má pro $k \rightarrow \infty$, $n-k \rightarrow \infty$ asymptoticky χ^2 -rozdělení o p st.v., pak můžeme (využijeme-li Bonferroniho nerovnost) test provést následovně:

$$(3.21) \text{je-li } \max_{p < k < n-p} \{U_k\} > \chi_{\alpha^{\#}}^2(p), \text{ zamítneme } H_0, \text{ jinak } H_0 \text{ přijmeme,}$$

kde $\alpha^{\#} = \alpha(n-2p)^{-1}$. Obdobný test dostaneme, využijeme-li Šidákovu nerovnost.

Při robustní verzi metody CUSUM založené na M -odhadech postupně počítáme M -rekurzivní rezidua (odpovídající W_k def. (3.13)) a odhady $\int \psi^2(x) dF(x)$, tj. počítáme

$$(3.20) W_1^{\#} = \psi(x_1 - g_1 \hat{g}_{1-1}(\psi)) \quad i=p+1, \dots, n,$$

$$(3.21) \quad \sigma_i^2 = i^{-1} \sum_{j=1}^i \psi^2(x_j - \xi_j' \theta_{j-1}(\psi)) \quad i=p+1, \dots, n.$$

a

$$(3.22) \quad M_k^e = M_{k-1}^e + W_k^e, \quad k=p+1, \dots, n, \quad W_p^e = 0.$$

Pro případ posunutí dostaneme W_i^e, σ_i^2 a M_k^e definované vztahy (2.45-2.47). Test provádíme dle (2.48) jen za W_i^e, σ_i^2 a M_k^e dosazujeme z (3.20-3.22). Pro limitní rozdělení platí (2.49).

Zcela analogicky lze sestavit robustní verzi MOSUM, tj. v (2.18) dosazujeme za W_j veličiny $W_j^e \sigma_j^{-1}$ definované (3.20) a (3.21). Kritickou hodnotu můžeme získat využitím limitního rozdělení (pro G dost velké při H_0 má $G^{-1/2} \sum_{j=t-G}^t W_j \sigma_j^{-1}$ přibližně normované normální rozdělení) a můžeme použít buď Bonferroniho nebo Šidákovu nerovnost.

M-odhady jsou definovány implicitně, k jejich výpočtu se používají iterační postupy, což vede v našem případě ke zdoluhavým výpočtům. Výpočetně méně náročné jsou tzv. rekurzivní M-odhady $\theta_k^0(\psi)$ a rekurzivní jedнокrokové M-odhady $\theta_k(\psi)$. Rekurzivní M-odhad je definován následovně:

$$(3.23) \quad \theta_{k+1}^0(\psi) = \theta_k^0(\psi) + \frac{1}{\chi_k^0(k+1)} \underline{C}^{-1} \underline{C}_{k+1} \psi(x_{k+1} - \underline{C}_{k+1}' \theta_k^0(\psi)) \quad k > p$$

$$\chi_k^0 = \frac{1}{2kt} \sum_{i=1}^k (\psi(x_i - \underline{C}_i' \theta_{i-1}^0(\psi) - i^{-\beta} t) - \psi(x_i - \underline{C}_i' \theta_{i-1}^0(\psi) - i^{-\beta} t))^2, \quad k > p$$

$t \neq 0$, kde $\theta_p^0(\psi)$ je vhodný počáteční odhad, matice \underline{C} je pozitivně definitní matice definovaná (3.6). S vlastnostmi odhadu $\theta_{k+1}^0(\psi)$ se čtenář může seznámit např. v Novovičová, Robust (1982). Rekurzivní jedнокroková verze M-odhadů parametru θ je definována jak následuje:

$$\theta_{k+1}^e(\psi) = \theta_k^e(\psi) + \underline{C}_{k+1}^{-1} \gamma_k^e \sum_{i=1}^{k+1} \underline{C}_i (x_i - \underline{C}_i' \theta_k^e(\psi)), \quad k > p$$

$$\gamma_k^e = \frac{1}{2 \sqrt{kt}} \sum_{i=1}^k (\psi(x_i - \underline{C}_i' \theta_k^e(\psi) + k^{-1/2} t) - (x_i - \underline{C}_i' \theta_k^e(\psi) - k^{-1/2} t)), \quad k > p$$

$t \neq 0$, kde $\theta_p^e(\psi)$ je vhodný počáteční odhad, $\underline{C}_k = \sum_{i=1}^k \underline{C}_i \underline{C}_i'$. Veličiny γ_k^0 a γ_k^e je nutné při výpočtu poněkud modifikovat (ořezávat).

Pokud se týče volby ψ , platí pro ni stejné doporučení jako při problému M-odhadu. Vzhledem k tomu, že M-odhady ani M-rekurzivní rezidua nejsou invariantní vůči změně měřítka, doporučuje se nahradit funkci $\psi(\cdot)$ funkcí $\psi(\cdot/s)$, kde s je odhad měřítka podle konkrétního postupu založený na všech n pozorováních nebo na pozorováních provedených do okamžiku mezivýpočtu. Další podrobnosti viz např. Antoch (1984).

4. Závěrečné poznámky

4.1 Poznámky k postupům v paragrafech 2 a 3

Podíváme-li se zpět na postupy vyložené v paragrafech 2 a 3, je vidět, že se setkáváme se třemi typy testových statistik. První je součet náhodných veličin (přesněji lineární kombinace testových statistik užívaných pro uvažovaný problém při známém bodu změny τ (popř. m)). Další typ je maximum náhodných veličin (maximum testových statistik užívaných pro uvažovaný problém při známém m). Třetím případem je opět typové maximum náhodných veličin, přesněji máme testové statistiky $\max_{p < i \leq k} \{M_i\}$, $k=p+1, \dots$ a hypotézu zamítáme, jakmile poprvé M_k překročí kritickou hodnotu, a neděláme další pozorování.

Sledujeme-li jejich limitní chování, pak v prvním případě dostaneme jako limitní rozdělení normální, ve druhém se shoduje s rozdělením $\sup_{t \in (0,1)} \{B_p^\sigma(t)\}$, kde $B_p^\sigma(t)$ je součet kvadrátů p nezávislých Brownových mostů. Ve třetím případě se shoduje s rozdělením $\sup_{t \in (0,1)} \{|W(t)|\}$, kde $\{W(t), t \in (0,1)\}$ je normovaný Wienerův proces.

Nyní se podíváme na porovnání různých testů. V literatuře lze najít porovnání hlavně pro případ změny posunutí. Nejprve uvedeme porovnání testů v 2.1. Lze očekávat, že výsledky pro změnu regrese jsou obdobné. Bayesovské testy (2.4)(2.5) jsou optimální z bayesovského hlediska (je však potřebná znalost apriorního rozdělení τ). Z hlediska Bahadurovy vydatnosti je test podílem věrohodností optimální (potřebujeme však přesně znát distribuční funkci F). Test optimální ve smyslu Pitmanově neexistuje. Simulace toto potvrzují a dále ukazují, že bayesovské testy jsou poněkud lepší jen, je-li změna τ přibližně kolem $t_{[n/2]}$ a že pro malé τ CUSUM detekuje alternativu stejně dobře jako test podílem věrohodností (CUSUM však většinou vyžaduje menší rozsah výběru).

Pokud se týče srovnání CUSUM a MOSUM, ukazuje se, že MOSUM detekuje alternativu dříve než CUSUM. Další informace lze nalézt např. v Hacklovi (1980), Deshayes a Picard (1986), Praagman (1987) a Haccou a kol. (1985).

Pro porovnání postupů uvedených v (2.1; 3.1) a (2.2, 3.2) platí to co např. pro dvouvýběrový problém. Je-li rozdělení náhodných veličin skutečně normální, jsou postupy uvedené v 2.1 a 3.1 lepší. Je-li však normální rozdělení kontaminované nebo máme značně neúplnou informaci o rozdělení, je lepší použít některý z robustních postupů. Je nutné si však uvědomit, že vliv prvních pozorování po změně bude u robustních postupů potlačen (budou klasifikována jako odlehlá pozorování), což způsobí pozdější zamítnutí H_0 (lze tedy očekávat, že odhad bodu změny bude vyšší než skutečná hodnota). Zajímá-li nás odhad bodu změny, popř. chceme-li podrobněji prozkoumat průběh změny, můžeme nejprve některý z postupů aplikovat na data (X_1, \dots, X_n) a pak na $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)$ a výsledky porovnat.

4.2 Odhad bodu změny

V literatuře se můžeme setkat s několika typy odhadů bodu změny τ . Při některé formulaci budeme vlastně odhadovat m (viz formulace alternativy).

Při bayesovském přístupu odhadneme τ na základě aposteriorního rozdělení parametru τ (apriorní jsme značili $p_m = P(\tau \in (t_m, t_{m+1}))$, $m=1, \dots, n-1$, $p_n = P(\tau > t_n)$) buď jako medián, nebo střední hodnotu aposteriorního rozdělení (v závislosti na volbě ztrátové funkce). Vzorce pro tyto odhady nejsou jednoduché. Pro některá rozdělení existují tabulky (viz např. Zacks (1983) pro další informace).

Maximálně věrohodný odhad τ získáme jako bod t_m , kde m je bod, pro který dosáhne testová statistika maxima (statistiky def. (2.8), (2.9), (3.3), (3.4)). Vlastnosti odhadů pro některé případy jsou uvedeny např. v Deshayes a Picard (1986).

Při metodě CUSUM a MOSUM odhadneme τ (přesněji řečeno m) následovně:

$$(4.1) \quad \min \{k; M_k \geq d_{\alpha, c}(k)\}$$

respektive

$$(4.2) \quad \min \{k; R_k \geq d_{\alpha, M}(k)\}$$

kde M_k je dáno v závislosti na uvažovaném modelu (2.11) nebo (3.14) a R_j dáno (2.18) M_j z (2.10) nebo (3.13). Další informace jsou např. v Hacklovi (1980).

Při robustním přístupu můžeme τ odhadnout zcela analogicky.

4.3 Některé další postupy

Testy uvedené v 2.1 a 3.1 se týkaly změn parametrů normálního rozdělení, což byl případ nejméně uvažovaný v literatuře. Bayesovský přístup i test podílem věrohodností lze použít obecně (informace lze nalézt např. v Schulze(1986)). Největší problém je nalezení kritických hodnot.

Při kontrole jakosti výrobků je obvykle problém formulován jako (1.2), kde $P(X_i=a) = p_i$ a $P(X_i=b) = 1-p_i$, $i=1, \dots, n$ a $E_H X_i = 0$. Kromě bayesovského testu a testu podílem věrohodností byly navrženy Pagem (1955) testy založené na statistice

$$(4.3) \quad T = \max_{0 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^k X_i - \min_{0 \leq s \leq k} \sum_{j=1}^s X_j \right\}$$

Příslušné kritické hodnoty jsou tabelovány v citovaném článku.

Dalším rozdělením, se kterým se setkáme hlavně v biologických aplikacích, je exponenciální rozdělení (další informace jsou v Haccou a kol. (1985)). Používají se testy podílem věrohodností, popř. jejich modifikace.

Z dalších testů stojí za zmínku testy Kolmogorova-Smirnova typu pro úlohu (1.2). Jsou založeny na statistice

$$(4.4) \quad K_n = \max_{1 \leq k \leq n} \sup_y \left\{ |\hat{F}_k(y) - \hat{F}_{n-k}(y)| g(k/n)k/n \right\} \sqrt{n} = \\ \max_{1 \leq k \leq n} \sup_y \left\{ |\hat{F}_k(y) - \hat{F}_n(y)| \frac{k}{n} (1 - \frac{k}{n}) g(k/n) \right\} \sqrt{n},$$

kde \hat{F}_k a \hat{F}_{n-k} jsou empirické distribuční funkce odpovídající pozorováním X_1, \dots, X_k respektive X_{k+1}, \dots, X_n a g je nezáporná funkce na $(0,1)$ integrovatelná se čtvercem. Je-li X_1, \dots, X_n náhodný výběr z rozdělení se spojitou distribuční funkcí F , pak

$$(4.5) \quad \mathcal{L}(K_n) \rightarrow \mathcal{L} \left(\sup_{t \in (0,1)} \sup_{u \in (0,1)} \{ |B(u,t)| g(u) \} \right) \text{ pro } n \rightarrow \infty,$$

kde $\{B(u,t), (u,t) \in (0,1)^2\}$ je dvourozměrný Brownův most (tj. gaussovský proces na $(0,1)^2$ s kovarianční funkcí $E B(u_1, t_1) B(u_2, t_2) = (\min(t_1, t_2) - t_1 t_2) (\min(u_1, u_2) - u_1 u_2)$ pro $u_i, t_i \in (0,1)$, $i=1,2$).

Sen(1983b) navrhl test založený na U-statistikách pro případ, že se změna rozdělení projeví ve funkcionálu $\theta(F) = E h(X_1, \dots, X_s)$ kde h je funkce symetrická v proměnných x_1, \dots, x_s integrovatelná se čtvercem, $s \leq n$.

Tabulka kritických hodnot příslušných Wienerovu procesu a Brownovu mostu:

α	w_α	$b_{\alpha,2}^*$	$b_{\alpha,1}^*$	$b_{\alpha,2}^*$	$b_{\alpha,3}^*$	$b_{\alpha,4}^*$	$b_{\alpha,5}^*$
0,01	2,807	1,517	2,650	3,392	4,004	4,550	5,054
0,05	2,241	1,224	1,844	2,510	3,056	3,542	4,000
0,1	1,96	1,073	1,498	2,114	2,615	3,084	3,516

Připomeňme definice jednotlivých kritických hodnot:

$$P \left(\sup_{t \in (0,1)} \{ |W(t)| \geq w_\alpha \} \right) = \alpha$$

$$P \left(\sup_{t \in (0,1)} \{ |B_1(t)| \geq b_{\alpha,2}^* \} \right) = \alpha$$

$$P \left(\sup_{t \in (0,1)} \left\{ \sum_{j=1}^p B_j^2(t) \right\} \geq b_{\alpha,p}^* \right) = \alpha,$$

kde $\{W(t), t \in (0,1)\}$ je normovaný Wienerův proces, $\{B_j(t), t \in (0,1)\}$, $j=1, \dots, p$ jsou nezávislé Brownovy mosty.

Literature

- Antoch, J.(1984). Některé postupy pro výpočet robustních odhadů v lineárním modelu. *Robust* 1984, 1-9.
- Bhattacharya, G.K., Johnson, R.A.(1968). Nonparametric shift at an unknown time point. *Ann.Math.Statist.* 39, 1731-1743.
- Brown, R.L., Durbin, J., Evens, J.M.(1975). Techniques for testing the constancy of regression relationship over time (w. discussion). *J.Roy.Statist.Soc.* B37, 149-192.
- Chernoff H. and Zacks, S.(1964). Estimating the current mean of a normal distribution which is subject to changes in time. *Ann. Math. Statist.* 35, 999-1018.
- Chin Choy, C.J.H. a Broemling, L.D.(1980). Some Bayesian inferences for a changing linear model. *Technometrics* 22, 71-78.
- Cobb, G.W.(1978). The problem of the Wile conditional solution to a change point problem, *Biometrika* 65, 243-251.
- Dienske, H. and Metz, J.A.J.(1977). Mother-infant body contact in Macaques; a time interval analysis. *Biology of Behaviour* 2, 3-37.
- Oshayes, J., Picard, D.(1986). Off-line statistical analysis of change-point models using non-parametric and likelihood methods, 103-168, v *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 77 - Detection of abrupt changes in signals and dynamical systems.
- Esterby, S.S. a El-Shaarawi(1981). Inference about the point of change in a regression model. *Appl.Statistics* 30, 277-285.
- van Eeden, C.(1972). An analogue for signed rank statistics of Jurečková's asymptotic linearity theorems for rank statistics. *Ann.Math.Statist.* 43, 751-802.
- Farley, J.N., Minich, M.J.(1970). A test for a shifting slope coefficient in a linear model. *JASA*, 65, 1320-1329.
- Ferreira, P.E.(1975). A Bayesian analysis of switching regression model: known number of regimes. *JASA* 70, 370-374.
- Gardner, L.A., Jr.(1969). On detecting changes in the mean of normal variates. *Ann. Math.Statist.* 40, 116-126.
- Haccou, P., Dienske, E. and Meelis, E.(1983). Analysis of time-inhomogeneity in Markov chains applied to mother-infant interactions of rhesus monkeys. *Animal Behaviour* 31, 927-945.
- Haccou, P., Meelis, E. a van der Geer, Sara (1985). On the likelihood ratio test for a change point in a sequence of independent exponentially distributed random variables, Report MS-R 8507(Amsterdam).
- Hackl, P.(1980). Testing the constancy of regression relationships over time. Goettingen. Vanden Hoeck und Ruprecht.
- Hackl, P. a Westlund, A. (1985). Statistical analysis of structural change, an annotated Bibliography, Zpráva IIASA CP-85-31.
- Hinkley, D.V.(1972). Time-ordered classification. *Biometrika* 59, 509-523.
- Hawkins, D.M.(1980). A note on continuous and discontinuous segmented regression. *Technometrics* 22, 443-444.
- Hsu, D.A.(1979). Detecting shifts of parameter in gamma sequences with applications to stock price and air traffic flow analysis, *JASA*, 74, 31-40.
- Hušková, M.(1986). Adaptive procedures for detection of change, submitted.
- Hušková, M.(1988). Recursive M-test for detection of change, v tisku v časopise *Statistics and Decisions*.
- Hušková, M. and Sen, P.k.(1988). Nonparametric tests for shift and change in regression at an unknown time point, v tisku.
- De Long, D.(1981). Crossing probabilities for a square root boundary by a Bessel process. *Comm.Statist.Theor.Math.* A10, 2197-2213.
- Novovičová, J.(1982). Rekurentní algoritmy odhadování v lineárním regresním modelu. *Robust* 1982, 60-67.
- Page, E.S.(1955). A test for a change in a parameter occurring at an unknown time point. *Biometrika* 42, 248-252.
- Page, E.S.(1957). On problems in which a change of parameters occurs at an unknown time point. *Biometrika* 44, 248-252.
- Pettitt, A.N.(1979). A nonparametric approach to the change-point problem. *Appl.Statist.* 28, 126-135.
- Picard, D.(1985). Testing and estimating change-points in time series. *Journal of Appl.Probab.* 17, 841-867.

- Praagman, J.(1987). Bahadur efficiency of rank tests for the change-point problem. Annals of Statist.
- Schechtman, E., Wolfe,D.A.(1981). Distribution-free tests for the change-point problem. Techn.Report, Ohio State Univ.
- Schulze, U.(1986). Identifikacija momentu zmiany rozkladu w ciagu zmiennych losowych. Roczniki polskiego towarzystwa matematycznego ser.III. Mat.Stosowana XXVII.
- Sen,A, Srivastava,M.S.(1975). On tests for detecting change in mean. Ann.Statist.3, 98-108.
- Sen,P.K.(1980). Asymptotic theory of some tests for a possible change in the regression slope occuring at an unknown time point. Z.Wahrscheinl.verw.Gebiete,52, 203-218.
- Sen,P.K.(1982). Asymptotic theory of some tests for constancy of regression relationships over time. Statistics 13, 21-31.
- Sen,P.K.(1983a). On some recursive residual rank tests for change-points. In Rizvi, M.H. (Ed.) Recent Advances in Statistics: Papers in Honor of Herman Chernoff's Sixtieth Birthday. New York, Acad.press, 371-391.
- Sen,P.K.(1983b). Tests for change-points based on recursive U-statistics. Sequential Analysis 1, 263-284.
- Sen,P.K (1984). Recursive M-tests for the constancy of multivariate regression relationships over time. Sequential analysis 3, 191-211.
- Shaban,S.A.(1980). Change-point problem and two phase regression: an annotated bibliography. Inst.Statist.Review 48, 83-93.
- Shirjajev, A.N.(1963). On optimum methods in quickest detection problems. Theor. Prob.Appl.10, 348-354.
- Shirjajev, A.N.(1978). Optimal Stopping Rules. Springer-Verlag, New York.
- Wolfe, D.A., Schechtman,E.(1984). Nonparametric statistical procedures for the changepoint problem. J.Stat.Planning and Inference 9, 389-396.
- Worsley, k.J.(1982). An improved Bonferroni inequality and applications. Biometrika 62, 297-302.
- Worsley K.J.(1983). Testing for a two-phase multiple regression.Technometrics 25, 35-42.
- Zacks, S.(1983). Survey of classical and Bayesian approaches to the change-point problem: fixed sample and sequential procedures of testing and estimation. Recent Advances in Statistics: Papers in Honor of Herman Chernoff's Sixtieth Birthday. New York, Acad.Press, 245-269.