ROBUSTNÍ ODHADY BAYESOVSKÉHO TYPU

Jan Hanousek, MFF UK

1. ÚVOD

V poslední době, hlavně díky automatickému zpracování dat, se stále častěji používají robustní metody. Bohužel, dosavadní typy robustních odhadů nevyužívají předchozích poznatků v datech. Na druhé straně bayesovské odhady nejsou robustní. Cílem tohoto článku je spojit vhodné vlastnosti obou tříd odhadů (robustnost a využití apriorní informace) a vytvořit třídu robustních odhadů bayesovského typu.

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se společnou hustotou $f(x-\theta)$ (vzhledem k Lebesgueově míře), kde $\theta \in \Theta \subset R$. Budeme předpokládat, že parametrický prostor Θ je otevřený interval a "skutečnou" hodnotu parametru θ budeme označovat θ_0.

Definice 1.1.

Odhad parametru polohy θ_0, který je definován vztahem

$$T_n = \frac{\int t.\exp\{-\sum_{i=1}^{n}(\rho(x_i-t)\}\,\pi(t)dt}{\int \exp\{-\sum_{i=1}^{n}(\rho(x_i-t)\}\,\pi(t)dt}, \tag{1.1}$$

pokud oba integrály existují, budeme nazývat B-odhadem generovaným funkcí ρ.

Všimněme si blíže zavedení B-odhadů. Vidíme, že B-odhad generovaný funkcí ρ je vlastně bayesovská aposteriorní střední hodnota náhodné veličiny θ mající apriorní hustotu $\pi(y)$ v případě, že hustota pozorování $f(x) = c.\exp(-\rho(x))$. Můžeme proto očekávat, že za určitých podmínek budou B-a M-odhady asymptoticky ekvivalentní a že při vhodné volbě funkce ρ (tj. takové, která se užívá v M-odhadech) získáme odhad bayesovského typu s dobrými robustními vlastnostmi. Tuto úvahu potvrzuje věta 2.1. Její důkaz je založen na kombinaci asymptotické linearity s výsledky Ibragimova a Chasminského (1972, 1973). Pro lepší orientaci uvedeme jejich předpoklady upravené na náš model:

I.

(I.1) Rozdělení P_θ náhodných veličin X_i je absolutně spojité vzhledem k Lebesguově míře ν definované na σ-algebře podmnožin R^1; označme $g(x-\theta) = dP_\theta/d\nu$.

(I.2) Parametrický prostor Θ je otevřený interval (omezený nebo neomezený) v R^1.

(I.3) Hustota $g(x-\theta)$ je měřitelná vzhledem k $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, kde $\mathcal{E}$ je σ-algebra měřitelných množin reálné přímky.

(I.4) Je-li $\theta \neq \theta'$, potom

$$\int_{R^1} |g(x-\theta)-g(x-\theta')|\,dx > 0.$$

II.

(II.1) $I = \int \psi^2(x)g(x)dx < \infty$.

III.

(III.1) Existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\sup_{\Theta} |\theta - \theta_0|^{\delta} \cdot \int \sqrt{(g(x-\theta).g(x-\theta_0)} \quad dx < \infty \quad .$$

IV.

(IV.1) Funkce $\pi(\theta)$ je měřitelná funkce $\theta \in R^1$, nulová vně Θ^c.

(IV.2) Existuje nezáporné číslo p_0 tak, že

$$\sup_{\Theta} \ (1 + |\theta|^{p_0})^{-1}.\pi(\theta) < \infty \ .$$

(IV.3) Funkce $\pi(\theta)$ je spojitá v okolí θ_0 a $\pi(\theta_0) \neq 0$.

V následující kapitole jsou studovány asymptotické vlastnosti B-odhadů v modelu polohy a v lineárním modelu. Za určitých podmínek kladených na apriorní rozdělení, na rozdělení chyb a na funkci ρ, je odvozena asymptotická reprezentace a asymptotické rozdělení B-odhadů a je ukázáno, že B- a M-odhady jsou asymptoticky ekvivalentní.

Třetí kapitola je věnována bodu selhání B-odhadů, v závěrečné části je provedena numerická ilustrace vlastností B-odhadů, ve které jsou hodnoty B-odhadů vypočteny numerickou integrací pomocí Gaussových kvadraturních vzorců.

2. ASYMPTOTICKÁ REPREZENTACE B-ODHADŮ

A. Odhad parametru polohy

Uvažujme model polohy z předcházející části a předpokládejme, že F má absolutně spojitou sudou hustotu f a konečnou Fisherovu informaci. Nechť $\psi(x) : R \to R$ je funkce vyhovující následující skupině podmínek:

(A.1) $\psi(x) = \partial\rho(x) / \partial x$,

(A.2) ψ je neklesající spojitá funkce, která má ohraničenou derivaci pro $x \in (a; b)$ a $\psi(x)$ je konstantní pro $x < a$ a $x > b$ $(-\infty < a < b < \infty)$.

Označme

$$g(x) = c \ . \ \exp(-\rho(x)),$$

kde

(2.1) $c = 1/ \int_R \exp(-\rho(x))dx.$

Předpokládejme, že existuje konstanta $p > 1$ taková, že

(B.1) $\quad {}_R\, f(x)^p \ . \ g(x)^{1-p}\, dx \leq 1.$

Poznámky:

(i) Postačující podmínkou pro (B.1) je, aby χ^p-divergence hustot $f(x)$ a $g(x)$ byla menší nebo rovna 1, tj. aby

$$\int \left| f(x)/g(x) - 1 \right|^p . \ g(x)dx \leq 1.$$

(definice χ-divergence - viz např. Vajda).

Tato podmínka může být nahrazena jakoukoli podmínkou implikující kontiquitu $\{P_n\}$ a $\{Q_n\}$.

(ii) Při důkazech asymptotických vlastností B-odhadů budeme vycházet z toho, že B-odhad je bayesovský odhad v případě, že $g(x)$ je hustota pozorování. Podmínka (B.1) je přirozená; říká, jak moc se může naše "hypotetická" hustota $g(x)$ lišit od $f(x)$. Jak dále uvidíme, podmínka (B.1) požaduje, aby chvosty $f(x)$ nebyly těžší než chvosty $g(x)$ při $x \longrightarrow \pm\infty$.

Věta 2.1.

Nechť T_n a M_n jsou po řadě B- a M-odhad generovaný funkcí φ. Nechť funkce $g(x)$ definovaná v (2.1) a apriorní hustota $\pi(\theta)$ splňují výše uvedené podmínky a podmínky I-IV.

Potom pro $n \to \infty$ platí

(2.2) $T_n - M_n = o_p(n^{-1/2})$

a

(2.3) $T_n = \theta_n + n^{-1}.\gamma^{-1}.\sum_{i=1}^{n} \psi(X_i - \theta_o) + o_p(n^{-1/2})$,

kde

$$\gamma = \int \psi'(x)dF(x).$$

Všimněme si, že asymptotická reprezentace B-odhadů nezávisí na počátečním rozdělení $\pi(\theta)$. Je to přirozené, protože informace o parametru θ obsažená v pozorováních asymptoticky převýší počáteční informaci obsaženou v apriorním rozdělení. Věta 2.1 se dá dokázat stejným způsobem i pro širší třídu funkcí ψ a φ. Podmínkou je, aby pro funkci platila asymptotická linearita a aby funkce g a π splňovaly předpoklady I-IV a (B.1).

Důkaz věty 2.1.

Nejprve si uvědomme, že podmínky věty (2.1) zaručují asymptotickou linearitu funkce a asymptotickou reprezentaci M-odhadu M_n ve tvaru

$$M_n = \theta_o + n^{-1}.\gamma^{-1}.\sum_{i=1}^{n} \psi(X_i - \theta_o) + O_p(n^{-1}).$$

Stačí proto dokázat pouze tvrzení (2.3).

Podle věty 2.1 Jurečková (1980) konverguje proces

$$M(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} [\psi(X_i - n^{-1/2}t - \theta_o) - \psi(X_i - \theta_o)] + n^{1/2}\gamma.t : |t| \leq M \right\}$$

slabě k procesu $\{t.X : |t| \leq M\}$, kde $X \sim N(0; \sigma^2)$.

Podle Prochorovovy věty spojité zobrazení $M(t)$ (ve Skorochodově topologii) konverguje slabě ke spojitému zobrazení limitního procesu. Tedy platí, že

$$\int_0^s \left(\sum_{i=1}^{n} [\psi(X_i - n^{-1/2}.t - \theta_o) - \psi(X_i - \theta_o)] + n^{1/2}.t.\gamma \right) dt \longrightarrow \int_0^s t.Xdt$$

pro $0 \leq s \leq M$. X opět značí náhodnou veličinu s normálním rozdělením $N(0; \sigma^2)$. Analogický vztah získáme pro $-M \leq s \leq 0$. integrací obou vztahů obdržíme, že proces

$$\left\{ n^{1/2} \sum_{i=1}^{n} [\varphi(X_i - \theta_o) - \varphi(X_i - \theta_o - n^{-1/2}.s)] - s\sum_{i=1}^{n} \psi(X_i - \theta_o) + n^{1/2}\gamma.\frac{s^2}{2} : |s| \leq M \right\}$$

konverguje slabě k procesu $\left\{\frac{s^2}{2}.X : 0 \leq s \leq M\right\}$.

Odtud zřejmě plyne vztah

$$(2.4)\quad \sup_{|t|\leq M} \left| \sum_{i=1}^{u} \left[\varrho(X_i-\theta_o)- \varrho(X_i-\theta_o-n^{1/2}t)\right] - n^{-1/2}t \,.\, \sum_{i=1}^{n}\psi(X_i-\theta_o)+ \gamma\frac{t^2}{2}\right| = O_p(n^{-1/2}).$$

Na druhé straně z definice B-odhadu po jednoduché substituci $s = \theta_o + n^{-1/2}t$ získáme rovnost

$$T_n = \theta_o + n^{-1/2} \,.\, \frac{\int t.\exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\varrho(X_i-\theta_o)- \varrho(X_i-n^{-1/2}t-\theta_o)\right]\right\} \pi(\theta_o+n^{-1/2}.t)dt}{\int \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\varrho(X_i-\theta_o)- \varrho(X_i-n^{-1/2}t-\theta_o)\right]\right\} \pi(\theta_o+n^{-1/2}t)dt} .$$

Je-li funkce g společná hustota pozorování, potom z důkazu věty 3.1 (Ibragimov, Chasminskij (1973)) plyne, že

$$(2.5)\quad T_n = \theta_o+ n^{-1/2} \frac{\int_{-D}^{D} t.\exp\left\{\sum_{1}^{n} \left[\varrho(X_i-\theta_o)- \varrho(X_i-n^{-1/2}t-\theta_o)\right]\right\} \pi(\theta_o+n^{-1/2}t)dt}{\int_{-D}^{D} \exp\left\{\sum_{1}^{n} \left[\varrho(X_i-\theta_o)- \varrho(X_i-n^{-1/2}-\theta_o)\right]\right\} \pi(\theta_o+n^{-1/2}t)dt} + o_p(n^{-1/2})$$

kde $D > 0$ je konstanta nezávislá na n.

Označme

$$g_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i)$$

a

$$f_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Nechť Q_n resp. P_n jsou pravděpodobnostní míry s hustotami g_n resp. f_n vzhledem k Lebesgueově míře.

Dále označme

$$A_n = \left[\left|n^{1/2}(T_n- \theta_o)- \frac{\int_{-D}^{D} t.\exp\{\dots\} \;\pi(\theta_o+n^{-1/2}t)dt}{\int_{-D}^{D} \exp\;\{\dots\}\;\pi(\theta_o+n^{-1/2})dt}\right| > \varepsilon\right],$$

kde $\varepsilon > 0$.

Potřebujeme dokázat, že vztah (2.5) platí i v případě, že hustota pozorování je $f(x)$, tedy že platí

$$Q_n(A_n) \longrightarrow 0 \;\Longrightarrow\; P_n(A_n) \longrightarrow 0.$$

Stačí tedy dokázat, že míry P_n jsou kontiguitní vzhledem ke Q_n. Postačující podmínkou pro kontiquitu měr je (viz lemma 3.5 Jurečková (1969)), aby pro každé $\varepsilon > 0$ existovalo $\delta > 0$ a $n_o \in N$ tak, že pro $n > n_o$ platí

$$Q_n(A_n) < \delta \;\Longrightarrow\; P_n(A_n) < \varepsilon .$$

Nechť $p > 1$. Využijeme Schwarzovu nerovnost s podmínkou (B.1). Dostáváme

$$P_n(A_n) = \int \prod_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{g(x_i)} \cdot \prod_{i=1}^{n} g(x_i) \cdot I_{A_n}(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$\leq \left(\int f(x)^p . g(x)^{1-p} dx \right)^{\frac{n}{p}} . (Q_n(A_n))^{\frac{p-1}{p}} .$$

Míry P_n jsou tedy kontignitní vzhledem ke Q_n(stačí volit $\delta = \varepsilon^{p(p-1)}$) a vztah (2.5) platí i v případě, že hustota pozorování je $f(x)$.

Vzhledem k tomu, že konstanta $D > 0$ je nezávislá na n, můžeme použít společně (2.4) a (2.5).

Obdržíme vztah

$$T_n = \theta_0 + n^{-1/2} \frac{\int_{-D}^{D} t.\exp\left\{ n^{-1/2} t \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i-\theta_0) - \frac{1}{2}\gamma t^2 \right\} . \pi(\theta_0+n^{-1/2}t)dt}{\int_{-D}^{D} \exp\left\{ n^{-1/2} t \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i-\theta_0) - \frac{1}{2}\gamma t^2 \right\} . \pi(\theta_0+n^{-1/2}t)dt} + o_p(n^{-1/2}).$$

Označme

$$C_n = n^{-1/2}\gamma^{-1} \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i-\theta_0).$$

Substitucí $s=t-C_n$ dostáváme

$$(2.6)\quad T_n = \theta_0 + n^{-1}\gamma^{-1}. \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i-\theta_0) + n^{-1/2}. \frac{\int_{-D-C_n}^{D-C_n} t.\exp(-\frac{\gamma}{2}t^2)\ \pi(*)\ dt}{\int_{-D-C_n}^{D-C_n} \exp(-\frac{\gamma}{2}t^2)\ \pi(*)dt}$$

$$+ o_p(n^{-1/2}).$$

$$* = \theta_0 + n^{-1/2}(t+C_n)$$

protože konstanta $D > 0$ je nezávislá na n, je posloupnost $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$, kde $D_m = m.D$, $m=1,2,\dots$ také nezávislá na n.

Dále, z centrální limitní věty plyne, že $C_n = O_p(1)$. Tyto skutečnosti společně s podmínkami IV. (spojitost a nenulovost $\pi(y)$ v okolí θ_0) zaručují, že třetí člen na pravé straně výrazu (2.6) bude řádu $O_p(n^{-1/2})$. Tím je věta 2.1 dokázána.

Důsledek 2.1

Za podmínek věty 2.1, při $n \to \infty$, má $n^{-1/2}(T_n-\theta_0)$ asymptoticky normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a s rozptylem

$$\sigma^2 = E\,\psi^2 . \gamma^{-2},$$

kde

$$\gamma = \int \psi'(x)dF(x).$$

Nyní se zaměříme na rozšíření těchto výsledků na lineární model.

B. Lineární model

Nechť $Y_1,\dots,Y_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s distribučními funkcemi $F_1, F_2,\dots,F_n$ pro které platí

$$F_i(y) = F(y-x_i\beta) \quad , \quad i=1,2,\dots,n,$$

kde $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_p)'$ je vektor neznámých parametrů; $\underset{\sim}{x}_i$, $i=1,\dots,n$ jsou známé vektory regresních konstant a distribuční funkce F je absolutně spojitá a symetrická kolem 0. Tedy budeme předpokládat, že pro náhodný vektor pozorování $\underset{\sim}{Y} = (Y_1,Y_2,\dots,Y_n)'$ platí

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e} \ ,$$

kde $\underset{\sim}{X} = (x_{i,j})$ je známá (design) matice n x p s plnou hodností, $\underset{\sim}{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_p)'$ je vektor neznámých parametrů a $\underset{\sim}{e} = (e_1,\dots,e_n)'$ je vektor chyb, které jsou nezávislé, stejně rozdělené se sudou hustotou $f(x)$.

Budeme uvažovat případ, kdy matice $\underset{\sim}{X}$ má speciální tvar; máme p lineárně nezávislých vektorů $\underset{\sim}{x}'_1,\dots,\underset{\sim}{x}'_p$ a i-tý vektor(řádek) se v matici $\underset{\sim}{X}$ n_i-krát opakuje $i=1,\dots,p$ a platí $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$.

Dostáváme analogii jednoduchého třídění - model, který můžeme zapsat ve tvaru

$$(2.7) \qquad Y_{ij} = \underset{\sim}{x}'_i\underset{\sim}{\beta} + e_{ij}, \qquad j=1,\dots,n_i, \quad i=1,\dots,p \ .$$

Označíme-li

$$\mu_i = \underset{\sim}{x}'_i\underset{\sim}{\beta} \ , \qquad i=1,\dots,p$$

je situace obdobná jako v modelu polohy. Máme p nezávislých výběrů z rozdělení $f(x-\beta_1),\dots,f(x-\beta_p)$. Každé μ_i je tedy parametrem polohy i-tého výběru $Y_{i1},\dots,Y_{in}$. Toho využijeme pro odhad neznámých parametrů $\beta_1,\dots,\beta_p$ ev. pro odhad lineární funkce těchto parametrů $\underset{\sim}{\lambda}'\cdot\underset{\sim}{\beta}$.

Označme

$$\underset{\sim}{X}^* = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{x}'_1 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{x}'_p \end{pmatrix}$$

regulární matici p x p.

Je-li $\hat{\underset{\sim}{\mu}}$ libovolný odhad neznámého vektoru $\underset{\sim}{\mu}$ (tedy i B-resp. M-odhad) potom pro odhady $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ a $\underset{\sim}{\lambda}'\cdot\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ platí

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{X}^{*-1}\cdot\hat{\underset{\sim}{\mu}}$$

a

$$\underset{\sim}{\lambda}'\cdot\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{\lambda}'\cdot\underset{\sim}{X}^{*-1}\hat{\underset{\sim}{\mu}} \ .$$

B-odhad vektoru $\underset{\sim}{\beta}$ generovaný funkcí ρ, který budeme označovat $\underset{\sim}{T}_n^{\beta} = (T_1^{\beta},\dots,T_p^{\beta})'$ je definován vztahem

$$\underset{\sim}{T}_n^{\beta} = \underset{\sim}{X}^{*-1}\cdot\underset{\sim}{T}_n^{\mu} \ ,$$

kde $\underset{\sim}{T}_n^{\mu} = (T_1^{\mu},\dots,T_p^{\mu})'$ je B-odhad vektoru $\underset{\sim}{\mu}$, který vznikl sdružením jednotlivých B-odhadů parametru polohy. To znamená, že

$$(2.8) \qquad T_i^{\mu} = \frac{\int t \cdot \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n_i} \rho(Y_{ij}-t)\right\}\cdot\pi_i(t)dt}{\int \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n_i} \rho(Y_{ij}-t)\right\}\cdot\pi_i(t)dt}$$

Pokud oba integrály existují, $\pi_i(y)$ zde značí apriorní hustotu náhodné veličiny $\underset{\sim}{x}'_i\underset{\sim}{\beta}$.

Můžeme tedy stejným způsobem dokázat asymptotickou reprezentaci B-odhadů v tomto jednoduchém lineárním modelu.

Věta 2.2

Nechť Y_{ij}, $j=1,\ldots,n_i$; $i=1,\ldots,p$ jsou nezávislé náhodné veličiny splňující model (2.7). Předpokládejme, že pro $n \to \infty$ platí

$$(2.9) \qquad \frac{n_i}{n} \longrightarrow \lambda_i \quad , \quad 0 < \lambda_i < 1 \quad , \qquad i=1,\ldots,p$$

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 .$$

Označme $T_n^{\beta} = (T_1^{\beta},\ldots,T_p^{\beta})'$ B-odhad vektoru $\underset{\sim}{\beta}$, který vznikl sdružením jednotlivých B-odhadů parametrů polohy β_i .

Potom za předpokladů věty 2.1 platí pro $n \to \infty$

$$T_i^{\beta} = \beta_i + n^{-1}.\lambda_i^{-1}\gamma^{-1} . \sum_{i=1}^{\lambda_i n} \psi(Y_{ij}-\beta_i) + o_p(n^{-1/2}), \quad i=1,\ldots,p.$$

Důkaz: Zřejmý důsledek věty 2.1

Označíme-li $\underset{\sim}{T}_n^{\beta} = (T_1^{\beta},\ldots,T_p^{\beta})'$ B-odhad vektoru neznámých parametrů $\underset{\sim}{\beta}$,

$$\underset{\sim}{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1^{-1},\ldots,\lambda_1^{-1}}_{n_1\text{-krát}},0 \ldots & & \ldots 0 \\ 0,\ldots,0 , & \underbrace{\lambda_2^{-1},\ldots,\lambda_2^{-1}}_{n_2\text{-krát}},0 \ldots & \ldots 0 \\ 0,\ldots & \ldots,0 & \underbrace{\lambda_p^{-1},\ldots,\lambda_p^{-1}}_{n_p\text{-krát}} \end{pmatrix}$$

matici řádu $p \times n$ a

$$\underset{\sim}{g} = (\psi(Y_{11}-\beta_1),\ldots, \psi(Y_{1n_1}-\beta_1),\ldots, \psi(Y_{p1}-\beta_p),\ldots, \psi(Y_{pn_p}-\beta_p))'$$

vektor délky n, potom dostáváme asymptotickou reprezentaci ve tvaru

$$(2.10) \qquad \underset{\sim}{T}_n^{\beta} = \underset{\sim}{\beta} + n^{-1}\gamma^{-1}\underset{\sim}{X}^{*-1}.\underset{\sim}{\mathcal{L}}.\underset{\sim}{g} + o_p(n^{-1/2}).$$

Důsledek 2.2.

Za podmínek věty 2.2, při $n \longrightarrow \infty$, má $n^{1/2}(T_n^{\beta}-\beta)$ asymptoticky normální rozdělení s vektorem střední hodnoty 0 a s rozptylovou varianční maticí

$$S = E\psi^2 . \gamma^{-2}\underset{\sim}{X}^{*-1}.\underset{\sim}{\mathrm{diag}} \left\{ \lambda_1,\ldots,\lambda_p \right\} . (\underset{\sim}{X}^{*-1})',$$

kde

$$\gamma = \int \psi'(x)dF(x).$$

Poznámka:

Stejně jako v modelu polohy, asymptotická reprezentace B-odhadu implikuje vztah

$$\underset{\sim}{T}_n^{\beta} - \underset{\sim}{M}_n^{\beta} = o_p(n^{-1/2}),$$

kde $\underset{\sim}{M}_n^{\theta}$ je M-odhad θ, který vznikl způsobem popsaným na začátku.

3. BOD SELHÁNÍ B-ODHADŮ

A. Parametr polohy

Věta 3.1

Nechť ρ je sudá a konvexní, $0 < \lim_{|x| \to \infty} \rho(x)/|x| = c < \infty$.
Je-li $\int y \cdot \pi(y)dy < \infty$, potom bod selhání B-odhadu (1.1) je $\varepsilon^* = (n+1)/2n+1$, v opačném případě $\varepsilon^* = 1/2$.

Věta 3.2

Předpokládejme nyní, že ρ je sudá, $\rho(0) = 0$ a že ρ je neklesající na obou stranách ($x \to \pm\infty$). Nechť

$$\lim_{|x| \to \infty} \rho(x) = +\infty ,$$

ale

$$\lim_{|x| \to \infty} \rho(x)/|x| = 0.$$

Dále předpokládejme, že $\psi = \rho'$ je spojitá a že existuje x_0 takové, že ψ je neklesající pro $0 < x < x_0$ a nerostoucí pro $x_0 < x < \infty$. Nechť existuje konstanta $k > 0$ taková, že

$$\int |t| \cdot \exp\{-k \cdot \rho(t)\} \cdot \pi(t)dt < \infty .$$

Potom bod selhání B-odhadu (1.1) splňuje $\varepsilon^* > (n-k)/(2n-k)$, je-li $k \leq 1$, pak $\varepsilon^* = 1/2$.

Důkaz vět 3.1 a 3.2

Důkaz lze provést analogicky (jde o jednoduché zobecnění) jako důkazy vět 5.2 a 6.1 v Huber (1984), proto ho ponecháváme čtenáři.

Vzhledem k asymptotické equivalenci B-a M-odhadů očekáváme, že i bod selhání odpovídajících B- a M-odhadů bude stejný. Situace je trochu jiná, díky vlivu apriorního rozdělení. Všimněme si, že funkce $\pi(y)$ obsažená v obou integrálech nemůže zmenšit bod selhání B-odhadů vzhledem k odpovídajícímu P-odhadu ($\pi(y) \equiv 1$).

Je to logické, protože zde funkce $\pi(y)$ slouží jako váhová funkce, která (vzhledem k odpovídajícímu P-odhadu) dává odlehlým pozorováním malou váhu (menší nebo rovnu 1). Všimněme si, že informace $\int t \cdot \pi(t)dt < \infty$ je ekvivalentní (z hlediska selhání odhadu) jednomu pozorování. Ve speciálním případě, má-li funkce $\pi(y)$ kompaktní nosič, je bod selhání roven 1, neboť informace o parametru θ obsažená v $\pi(y)$ je z hlediska selhání velmi "silná" a k vlastnímu selhání B-odhadu vůbec nedojde. Ovšem taková situace je okrajová a může být snadno samostatně prozkoumána.

B. Lineární model

Vzhledem k našemu modelu (2.4) je situace podobná jako v předchozí části, s tím, že máme p-modelů polohy, každý s n_i pozorováními ($n_i \gg 1$) a předpokládáme, že pro $n \to \infty$

$$n_i/n \to \lambda_i, \quad i=1,\dots,p, \quad \lambda_i > 0$$

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

Vidíme, že odhad selže, pokud selže odhad v alespoň jednom modelu polohy. Označme

$$\lambda^{*} = \min_{1 \leq i \leq p} \lambda_i .$$

Dostáváme snadné důsledky vět 3.1 a 3.2.

Věta 3.3

Nechť jsou splněny předpoklady věty 3.1.
Je-li $\int t \,.\, \pi(t)dt < \infty$, potom bod selhání B-odhadu (2.8) je $\varepsilon^{*} = \frac{\lambda^{*} + 1/n}{1 + \lambda^{*} + 1/n}$,
v opačném případě $\varepsilon^{*} = \frac{\lambda^{*}}{1 + \lambda^{*}}$.

Věta 3.4

Nechť jsou splněny předpoklady věty 3.2.
Potom bod selhání B-odhadu (2.8) splňuje $\varepsilon^{*} > \frac{\lambda^{*} - k/n}{1 + \lambda^{*} - k/n}$, je-li $k \leq 1$, potom
$\varepsilon^{*} = \frac{\lambda^{*}}{1 + \lambda^{*}}$.

Opět, jako v předcházející části neuvažujeme případ, že $\pi(y)$ má kompaktní nosič. Všimněme si ale, že je-li náš model "vyvážený", tj. $n_i = \frac{n}{p}$ (v každé skupině provádíme stejný počet pozorování), je bod selhání $\varepsilon^{*} = \frac{1}{p+1}$ resp. $\frac{1 + 1/n}{1 + p + p/n}$ resp. je větší než $\frac{1 + pk/n}{1 + p + pk/n}$

Použitá literatura

1 Andrews D.R. et al: Robust Estimates of Location. Survey and Advances. Princeton University Press, 1972.

2 Billingsley P.: Convergence of Probability Measures. New York, John Wiley, 1968.

3 Hanousek J.: Asymptotic relation of M-and P-estimators of location, Comp.Statist. and Data Anal. 6(1988), 277-284.

4 Hanousek J.: Robust Bayesian type estimators and their asymptotic representation. Submitted (1988).

5 Huber P.J.: Robust Statistics. New York, John Wiley, 1981.

6 Huber P.J.: Finite sample breakdown of M- and P- estimators.The Annals of Statistics, 1984, Vol. 12, No. 1, 119-126.

7 Ibragimov I.A., Chasminskij R.Z.: Asimptotičeskije pověděnije někotorych statističeskich ocenok I. Těorija věrojatnostěj i jejo priměněnija, 1972, 17, 3, 469-486.

8 Ibragimov I.A., Chasminskij R.Z.: Asimptotičeskije pověděnije někotorych statističeskich ocenok II. Těorija věrojatnostěj i jejo priměněnija, 1973, 18, 1, 78-93.

9 Johns M.V.: Robust Pitman-like estimators. Robustness in Statistics, 49-60, New York, Academic Press, 1979.

10 Jurečková J.: Asymptotic reprezentation of M-estimators of location. Math. Operationsforschung und Statistik, Ser. Statistik, 1980, 11, 61-73.

11 Jurečková J.: Asymptotic linearity of rank statistic in regression parameter. The Annals of Mathematical Statistics, 1969, 40, 6, 1889-1900.

12 Krylov V.I.: Approximate Calculation of Integrals. MacMillan, New York-London, 1962.

13 Serfling R.J.: Approximation Theorems of Mathematical Statistics. New York, John Wiley, 1980.

14 Vajda I.: Teória informácie a štatistického rozhodovania, Alfa, Bratislava 1982.