PRAVDĚPODOBNOST VE STŘEDOVĚKU

Ivan Saxl

Adresa: MFF UK, KPMS, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín

E-mail: `saxl@math.cas.cz`

Klíčová slova: Historie pravděpodobnosti, úloha o dělení sázky, Ohriho úloha, pravděpodobnost a talmud.

Abstrakt

Objevy středověkých rukopisů z počátku XV. století pozměnily obecně přijatý předpoklad, že počátkem teorie pravděpodobnosti byla korespondence Pascala a Fermata v roce 1654. Nalezená starší řešení problému o rozdělení sázky jsou shodná s výsledky Pascala, Fermata i Huyghense.

Discoveries of mediaval manuscripts from the beginning of the XV$^{\text{th}}$ century modify the generally accepted assumption that the probability theory originates in the correspondence of Pascal and Fermat in 1654. The older solutions of the problem of points have the same results as were found by Pascal, Fermat and later also by Huyghens.

1. Úvod

Proč se máme zajímat o historickou roli pravděpodobnostního uvažování v našich životech? Nejspíš proto, abychom neopakovali a dále nešířili účelové nepravdy o jeho nedůležitosti v běžném životě, abychom si uvědomili jeho rozmanitost a zbavili teorii pravděpodobnosti dětských chorob získaných v XVII. století, především její poplatnosti hrám a její přednostní aplikace na případ souboru jevů podle naší zkušenosti či představy stejně možných.[1] Ta je i základem školské výuky, pokud k ní ještě v rámci současných snah učit jen to důležité vůbec dochází. Je těžké si představit větší absurditu.

Téměř obecně je přijímáno tvrzení, že teorie pravděpodobnosti vznikla v XVII. století při řešení úlohy o rozdělení sázky (rozdělení banku v přerušené hře) B. Pascalem a P. de Fermatem v roce 1654. S nejistými náhodnými jevy jsme se však setkávali odedávna, ať už ve formě nemocí, válek a nehod nejrůznějšího druhu, a o co nejpravděpodobnější reakci na ně jsme se snažili jako jednotlivci i jejich soubory vytvořené blízkostí jejich časového a lokálního

[1] Jinak se nám může stát, že při použití slavného Laplaceova vzorce pro pravděpodobnost zítřejšího východu Slunce na naše ranní probouzení se už neprobudíme právě toho dne, kdy pravděpodobnost probuzení bude maximální.

rozmístění. Celý systém práva a soudnictví se od nepaměti potýkal s problémem rozhodování na základě nejistých i záměrně zkreslených údajů. Nejistá byla i doprava a obchod, což vedlo k vytváření spolupracujících organizací za účelem rozložení rizika na více osob (firem) i ke vzniku pojištění a riziko zahrnujících půjček. V těchto souvislostech se používá termínu nenumerická pravděpodobnost (i když ocenění rizika už numerické je) a její historii je věnována kniha J. Franklina [1].

Úloha o rozdělení sázky vznikla ve středověku, Ore v práci [2] uvádí, že ji našel v italském rukopise z roku 1380 a také připouští, že mohla být arabského původu. Odkazovaný rukopis však nikdo jiný neviděl a Ore jej blíže nespecifikuje. Je známo několik forem úlohy; vyskytovala se často ve sbírkách příkladů[2] i rukopisech a mezi její neúspěšné řešitele patří L. Pacioli, N. F. Tartaglia, G. F. Peverone i G. Cardano, který však zformuloval důležitý *princip úměrnosti*, podle nějž řešení musí záviset pouze na počtech her, které hráčům k výhře chybějí (za úspěšné považujeme řešení platné pro libovolné počty hráčům chybějících her).

V posledních letech však byly v italských rukopisech z první poloviny XV. století nalezeny (L. Toti Ricatelli [3] v roce 1985 a R. Franci [4, 5] v roce 2003) dvě podobné úlohy, které vzbudily značnou pozornost [1], [6]. Jejich anonymní autoři podali důmyslná aritmetická a kombinatorická řešení zahrnující i účast tří hráčů v přerušené hře. Vedle rozborů jejich řešení je hledán původ podobných úloh v komerční oblasti, kde se pravděpodobnostní úvahy objevovaly v souvislosti s pojišťováním lodních nákladů a půjčkami na přepravované zboží [7].

Za zmínku rovněž stojí blízkost Pascalových úvah ke starému talmudickému principu dělení šatstva, známému především z jeho aplikace na vysvětlení (po staletí hledané) talmudem navrženého způsobu dělení dědictví, v němž se navíc uplatňuje také koaliční přístup [8–10]. Podobně jako v jiných oblastech historie přírodních věd se zde ukazuje problematičnost spojování počátků různých vědních oborů s konkrétními jednotlivci.

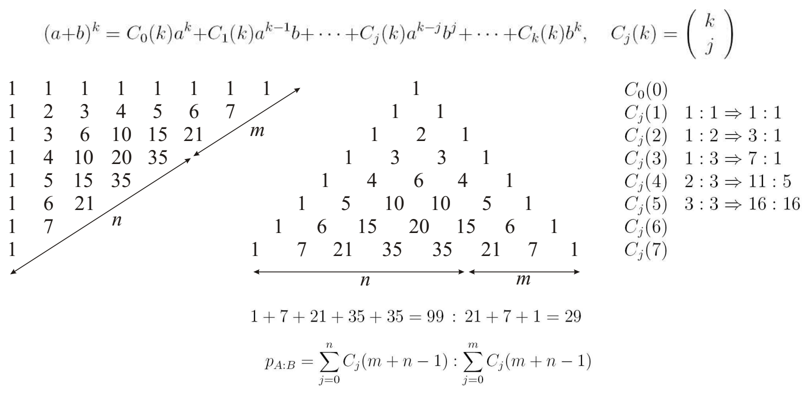
---

[2] Ore cituje dvě zadání z Forestaniho *Practica d'Arithmetica...* vydané v Benátkách v roce 1603. V prvním si šlechtic pozve dva mládence, aby mu pro zábavu za odměnu zahráli osm míčových her; za stavu 5:3 však ztratí míč a je třeba vhodně rozdělit odměnu. Ve druhém tři vojáci hrají o nalezený peníz 14 her a k přerušení dojde za stavu 10:8:5. Luca Pacioli přerušuje míčovou hru na vítězných 60 bodů za stavu 50:20 a lukostřelecké závody na šest vítězství za stavu 4:3:2 (*Summa de Arithmetica ...* Benátky 1494). Meusnier [6] komentuje příklady z rukopisu *Codice L. VI. 45* z doby kolem roku 1490 uloženého v Biblioteca Communale de Sienne, jehož autorem Filippo Calandri, od něhož pochází jedna z prvních tištěných aritmetik, vydaná v roce 1491. V prvním Calandriho příkladu hrají dva muži míčovou hru (jeu de pomme, předchůdkyně tenisu s hracím pokynem *tennez!*) na šest setů a přeruší ji za stavu 4:3, v druhém příkladu tři muži střílejí lukem na terč a hru ukončí po zlomení luku za stavu 2:1:0. Řešení obou úloh jsou nesprávná.

2. Pascalovo a Fermatovo řešení

Kombinatorické řešení je dobře známé; pro nízký maximální počet N chybějících her a dva hráče A a B, kterým chybí m a n her, $N = (m + n - 1)$, se najdou všechny možné kombinace s opakováním N prvků A, B, a stanoví se poměr dělení banku $p_{A:B}(m, n)$, který je podílem celkového počtu možných her, které by daly celou sázku hráči A ku počtu her, při nichž by vyhrál hráč B. Např. pro $N = 3$ dostaneme AAA, AAB, ABA, BAA, BAB, BBA, ABB, BBB; jestliže $m = 1$, tj. $n = 3$, pak hráč A vyhrává v sedmi případech a hráč B pouze v případě BBB – dělení sázky je tedy v poměru $p_{A:B}(1, 3) = 7 : 1$. Ve skutečnosti by se hrály pouze hry A, BA, BBA a BBB, ale započtení ostatních je ústupkem požadavku, aby všechny tyto soubory her byly stejně možné, a tedy i stejně pravděpodobné; skutečně každá ze započtených osmi her má pravděpodobnost $1/8 = 2^{-3}$. Naproti tomu reálně hrané hry A, BA, BBA a BBB mají pravděpodobnosti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, a protože B vyhrává pouze v poslední z nich, je dělení sázky opět 7:1.

K řešení různých konkrétních zadání úlohy lze použít Pascalova trojúhelníku – viz obrázek 1. Pascal kreslí trojúhelník s jednou odvěsnou svislou, dnes jsme zvyklí jej kreslit s vodorovnou přeponou. V případě, kdy hráčům chybí do výhry m (hráči A) a n (hráči B) bodů, je celkový počet nutných her maximálně $m + n - 1$. Najdeme v trojúhelníku řádek (diagonálu v Pascalově orientaci) s počtem $m+n$ čísel a sečteme v něm n a m čísel za sebou jdoucích. Poměr dělení sázky $p_{A:B}$ (tj. podíl hráče A ku podílu hráče B) je pak poměr těchto součtů, viz obecný vzorec pro $p_{A:B}$. Výše uvedený případ pro $N = 3$, $m = 1$, $n = 3$ tak najdeme na čtvrtém řádku. Rozeberme podrobněji případ $m = n = 3$ (začátek hry na 3 vítězství, $N = 5$, šestý řádek) a všimněme si hodnot výher v jednotlivých hrách. Představme si, že k sázce v hodnotě 32 mincí přispěl každý z hráčů 16 mincemi. Při ukončení první hry např. vítězstvím hráče A se poměr změní ze 16:16 na 11:5, tj. mají 22 a 10 mincí a vítěz získal 6 mincí. Po další výhře (poměr 7:1, tj. 28:4) by opět dostal 6 mincí, zatímco při prohře by 6 mincí vrátil hráči B (stav 1:1 a tedy 16:16). Poslední (tj. třetí) vítězství by hráči A přineslo již jen zbývající 4 mince. Stejné 4 mince by vyhrál v této hře i svým prvním vítězstvím hráč B a měl pak 8 mincí. Kdyby vyhrál i následující hru, získal by dalších 8 mincí a hráči by měli každý 16 mincí jako na začátku. Pokud by tedy hráli i závěrečnou hru, byla by o 16 mincí. V každé hře se tedy hraje o jinou částku. Této charakteristiky si všiml již Pascal a podrobně ji studoval. Kombinatoricky lze řešit i případ tří hráčů.



Obrázek 1. Řešení úlohy o rozdělení sázky pomocí Pascalova trojúhelníku.

Pascal však v dopise z 29. 6. 1654 nastiňuje i druhý přístup. Začíná s úvahou o situaci, kdy k vítězství jsou nutné nejvýše dvě hry, tj. stav $m = 1$, $n = 2$, a hra už dále nebude pokračovat. Pak uvažuje takto: celá sázka by byla moje, kdybych vyhrál a v opačném případě se budeme dělit napůl. Polovina sázky je tedy moje v každém případě a druhou polovinu si rozdělíme napůl. Dělení je tedy v poměru 3:1. Případ $m = 1$, $n = 3$ řeší podobně; kdyby vyhrál, je celá sázka jeho, jinak by se hrálo dál o její polovinu: to by však byl předchozí případ s $m = 1$, $n = 2$, takže polovina sázky by se dělila v poměru 3:1, což opět dává konečné dělení v poměru 7:1. Právě při této Pascalově úvaze stojí za připomenutí talmudický princip dělení šatstva resp. oděvů (*Baba Mezi'a 2a*, tj. *Střední brána*).[3]

Z jistého souboru oděvů (např. nálezu či pozůstalosti) nárokuje jeden účastník sporu všechno a druhý polovinu. Podle talmudického řešení první dostane 3/4 a druhý 1/4 dědictví. Zdůvodnění je, že jednu polovinu nárokuje pouze jeden účastník a tedy ji dostane celou, druhou polovinu nárokují oba a o ni se tedy rozdělí rovným dílem. Lze také říci, že celkový nárok je 3/2 a o chybějící část (celkovou ztrátu) se oba dělí stejným dílem (tzv. dualita řešení). Tento způsob dělení se zřejmě liší od běžného dělení úměrného nárokům; v anglické literatuře se nazývá *contested garment (CG) principle* – princip dělení oděvů. Jeho souvislost s možným řešením bankrotu je zřejmá.[4]

[3]Talmud se vyskytuje ve dvou verzích: jeruzalémské (vzniklé kolem roku 400) a babylonské (427–560). Na internetové stránce `http://www.come-and-hear.com/tcontents.html` je anglický překlad babylonského talmudu s rozsáhlými komentáři a možností stažení.

[4]Druhá úloha z mišny (*Kethuboth 93a*, tj. přibližně *Manželské právo*) je následující: dědictví po zemřelém muži má být rozděleno mezi tři jeho ženy, jejichž nároky plynoucí ze

Pozoruhodnou vlastností řešení odpovídajících CG-principu je jejich dualita, jejíž jednoduchá verze se vyskytla již u oděvního problému: místo pro rozdělení dědictví lze koaliční přístup použít pro výpočet dělení schodku, což je výhodné, pokud odkaz převyšuje součet polovičních nároků dědiček. Důmyslnou demonstrací pravidel dělení podle CG-principu je Kaminského model [11] aplikovatelný na libovolný počet účastníků při libovolně vysokém odkazu. Model spolu s přehledem dělení dědictví a schodků jsou zařazeny v Dodatku.

3. OHRI a jeho rukopis

Představy o pozdním počátku úspěšného řešení úloh podobného typu narušila Laura Toti Rigatelli [3] v roce 1985 nálezem rukopisu *Codice Magliabechiano CL.XI.120* v Biblioteca Nazionale de Florence s datováním kolem roku 1420. Obsahuje vyřešenou úlohu o rozdělení sázky typu $N = 3$, $m = 1$, $n = 3$ s výsledkem shodným s Pascalem a Fermatem. Neznámého autora rukopisu nazval N. Meusnier [6] *Ohri – Object historique relativement incertain.* Problematika korektních (rozumí se z našeho současného hlediska, které ovšem nemusí být jediné možné) matematických úvah o náhodných jevech se tímto posouvá téměř o 250 let zpět a vzbudila velkou pozornost. Patrně pod je-

svatební smlouvy jsou vyšší než zděděná částka. Mišna uvádí dělení znázorněné následující tabulkou:

Odkaz	**Vyplacený podíl**		
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
200	50	75	75
300	50	100	150
Nárok	**A:100**	**B:200**	**C:300**

Tento způsob dělení byl po staletí diskutován a považován za nekonsistentní: v prvním řádku je částka rozdělena bez ohledu na nárok, v druhém málo pochopitelně a jenom ve třetím proporcionálně. Až Aumann a Maschler [8] dokázali, že řešení splňuje CG-princip pro každou „koalici“ podílnic a navíc, že je jediné, které má tuto vlastnost. Navíc ukázali souvislost talmudického řešení s teorií koaličních her; viz též práce Rosenberga [9], v níž jsou shrnuta vysvětlení řešení podaných v mišně, gemaře a toseftě. Podle CG-principu při dědictví 100 tuto částku nárokují všechny tři ženy, a proto se o ni dělí rovným dílem. Při dědictví 200 se ženy B a C (jako dvojice), které nárokují celou částku, dělí s A, nárokující její polovinu, přesně jako v oděvní úloze v poměru 1:3, a navzájem v poměru 1:1, protože obě nárokují zbylou částku celou. Při dědictví 300 dostane žena A opět 50, protože nárokuje jednu třetinu a dostane z ní jednu polovinu, tj. šestinu dědictví. O zbylých 250 se dělí B a C tak, že C dostane 50, o něž se nevede spor, a zbylých 200 si opět rozdělí na polovinu. Koalice můžeme tvořit libovolně, např. při dědictví 300 se koalice A, B dělí s C rovným dílem, protože obě strany nárokují celou částku, takže C dostane 150. O dalších 150 se A s B dělí tak, že A dá B přebývajících 50, které převyšují její požadavek, a zbylých 100 si opět dělí rovným dílem.

jím vlivem začala být středověkému chápání náhody věnována značná pozornost, a to především v oborech námořní plavby a s ní souvisejících pojištění, půjček a podílnictví na riziku podnikání[5], to vše v podmínkách církví nedovolených úrokových plateb považovaných za lichvu[6]. Původní italský text Ohriho úlohy, jeho překlad do francouzštiny a detailní rozbor jsou obsaženy v Meusnierově práci [6], anglický překlad a stručný rozbor úlohy obsahuje i Franklinova kniha [1].

Ohriho úloha: Dva muži hrají šachy a každý vsadí jeden dukát na toho, kdo první vyhraje tři hry. První muž pak vyhraje dvě hry za sebou. Ptám se: když hra nebude pokračovat dál, jakou část dukátu druhého muže ten první vyhrál? Úloha je tedy zcela ekvivalentní úloze o rozdělení sázky pro $N = 3,\ m = 1,\ n = 3$ s výše uvedeným výsledkem dělení 7:1, takže podle Pascala a Fermata je výhra hráče A rovna 3/4. Jediným rozdílem je představa průběžného placení každé hry s podobným výsledkem, jaký nalezl Pascal, že totiž hodnoty výher v jednotlivých hrách jsou různé.

Řešení: Předpokládejme, že první hráč (A) vyhrál první hrou na druhém hráči částku x (v italském originále je označena c podle *cosa* – věc, neznámá položka) a druhou hrou získal opět x, takže hráč B má nyní $1 - 2x$. Kdyby hráč A nyní vyhrál, získal by od B celou tuto částku. Vyhraje-li naopak B, musí tuto cenu třetí hry získat také a bude mít dohromady svůj zůstatek $1-2x$ a k němu ještě výhru $1 - 2x$, tj. celkem $2 - 4x$. Zároveň se výhra $2x$ hráče A o tuto částku zmenší, takže ten bude nyní mít $2x - (1 - 2x) = 4x - 1$. Kdyby nyní hráč A vyhrál, bude všechno jeho, a tedy ve čtvrté hře vyhraje $2-4x$, tj. vše, co má hráč B. Kdyby ovšem ve čtvrté hře znovu vyhrál hráč B, stav hry by se vyrovnal a každý by měl právě svůj původní dukát. K tomu je nezbytné, aby získal celou dosavadní výhru hráče A, tedy $4x - 1$. Tak dostáváme dvě vyjádření ceny čtvrté hry a ta se musejí rovnat, takže $4x-1 = 2-4x$ a odtud $x = 3/8$. Hráč A tedy v první hře vyhrál $3/8$ dukátu, v druhé totéž a má tedy celkem $6/8 = 3/4$ z dukátu hráče B, tj. celkem $7/4$ dukátu, a hráč B má $1/4$ dukátu; sázka se tedy dělí v poměru 7:1. Kdyby hra skončila až po první výhře hráče B, pak ten by měl $2 - 4x = 1/2$ a hráč A tedy $3/2$, takže dělení by bylo v poměru 3:1, opět shodně s Pascalem a Fermatem. V úvaze není

[5] Slovo *resicum* se objevuje poprvé kolem roku 1160 v latinsky psaných janovských a pisánských dokumentech a v mírně pozměněných tvarech (risatio (it.), riesgo (španěl.), risk (angl.), Risiko (něm.)) se objevuje v řadě jazyků, včetně našeho. Patrně je odvozeno z arabského výrazu *rizq*, znamenajícího šanci nebo štěstí (viz [12]). Původní užití v záležitostech spojených s námořní dopravou se postupně rozšířilo do oblastí ručení za půjčky, dozoru měst na osobní bezpečnost obchodníků na jejich územích i do záležitostí dědických.

[6] Lichvou – *usuri* – byl zpočátku každý dohodnutý přeplatek původně zapůjčené částky a křesťanům byla církví zakázána. Posléze bylo vyžadováno rizikové podílnictví na obchodní akci, v jehož rámci pak byla finanční podpora úrokového či pojistného typu připuštěna.

kombinatorika ani talmudické dělení oděvů, ale pouze čistá aritmetická logika s předpokladem, že hra má stejnou hodnotu, ať ji z hráčů vyhraje kterýkoliv. Velmi podrobný rozbor řešení je v práci [6].

Kdo byl autorem řešení v rukopise Ohri nevíme, ale patrně to nebyl ten, kdo jej zapsal. Za první úlohou totiž ještě následuje druhá, v níž se hraje na 4 hry. Ta však není dořešena a to, co je uvedeno, není správné (v řešení by se musela objevit nová neznámá odpovídající další hře). Meusnier [6] se proto domnívá, že rukopis je nedokonalým opisem originálu, pořízeným někým, kdo problému dostatečně nerozuměl (v případě $N = 4, m = 1, n = 4$ by hráč B musel vyhrát čtyřikrát za sebou). Pravděpodobnost tohoto sledu výher je pouze $2^{-4} = 1/16$, a dělení by tedy bylo 15:1.

4. Ohrigens a úlohy o třech hráčích

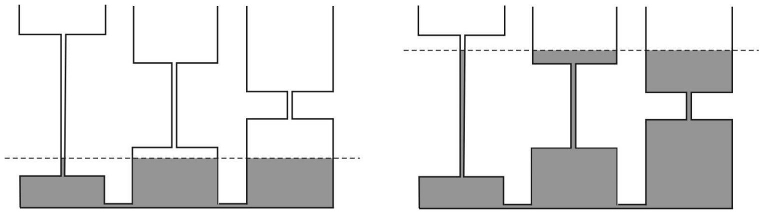
Že středověké představy o náhodných jevech a o řešení problémů s nimi spojených, uplatněné v rukopisu Ohri, byly rozšířené více, než jsme si dosud představovali, dokázal další rukopisný nález Raffaelly Franci v Biblioteca Apostolica Vaticana v roce 2002 [4, 5]. Meusnier jeho autora (autory?) nazval *Ohrigens* (lidé Ohri či Ohriové); překlad rukopisu do francouzštiny a jeho detailní rozbor jsou opět obsaženy v Meusnierově práci [6]. V rukopise je řešena úloha o rozdělení sázky pro případ tří hráčů hrajících na tři vítězné body a končících v situaci, kdy prvnímu hráči chybí jeden bod, druhému dva a třetímu tři, jedná se tedy o úlohu typu $N = 5,\ m = 1,\ n = 2,\ o = 3$. Řešení vyžaduje analýzu všech možností, jimiž by hra mohla skončit. Připomeňme si nejjednodušší případ se stavem $N = 3,\ m = n = 1,\ o = 2$ řešený Huyghensem v [13]. Stačí uvažovat situaci hráče A, který buď vyhraje sám a získá sázku nebo vyhraje hráč B a nedostane nic nebo vyhraje hráč C a sázka se dělí na třetiny. Naděje hráčů A i B na výhru je tedy $1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$, takže na hráče C zbývá $\frac{1}{9}$ a dělení je 4:4:1. Výše uvedenou Ohrigensovu úlohu řeší také Huyghens se shodným výsledkem 19:6:2. Ohrigens ovšem postupně řeší i řadu dalších úloh s ní souvisejících. Všechna řešení jsou správná a jsou shrnuta v následující tabulce, kde jednotlivé případy jsou zapisovány jako mno, kde m, n, o jsou body chybějící hráčům A, B, C při hře na 3 vítězství.

$m\ n\ o$	**1 1 2**	**1 2 2**	**1 1 3**	**1 2 3**	**1 3 3**	**2 2 3**	**2 3 3**
dělení	4:4:1	17:5:5	13:13:1	19:6:2	65:8:8	34:34:13	133:55:55

5. Dodatek

V Kaminského modelu [10, 11] sledujeme výšky hladiny kapaliny ve spojitých nádobách – viz obrázek 2. Jejich počet je roven počtu dědiců (účastníků sporu) a výška spodních nádobek je úměrná polovičním nárokům účastníků.

Obsah spojovacích trubiček je zanedbatelný. Tím je zajištěno, že různé dělení je možné teprve tehdy, když je nejprve uspokojen poloviční nárok účastníka s nejmenší pohledávkou, poté poloviční nárok účastníka s druhým nejnižším požadavkem atd.



Obrázek 2. Model spojitých nádob pro tři účastníky při odkazu nepřesahujícím polovinu celkového nároku (levý obrázek: odkaz 200, dělení 50:75:75) a v případě opačném (pravý obrázek: odkaz 400, dělení 50:125:225).

Následující tabulka uvádí kompletní dělení dědictví mezi tři dědičky až do výše jejich plného nároku.

Odkaz	**Vyplacený podíl**			**Schodek**	**Podíl na schodku**		
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	500	$66\frac{2}{3}$	$166\frac{2}{3}$	$266\frac{2}{3}$
200	50	75	75	400	50	125	225
300	50	100	150	300	50	100	150
400	50	125	225	200	50	75	75
500	$66\frac{2}{3}$	$166\frac{2}{3}$	$266\frac{2}{3}$	100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
600	100	200	300	0	0	0	0
Nárok	**A:100**	**B:200**	**C:300**	**Nulový**	**A**	**B**	**C**

Pro vyšší hodnoty odkazu (dědictví přesahující polovinu celkového nároku) je jednodušší místo zisků dělit ztráty. Např. dědictví 100 je rozděleno na rovné díly, neboť $33\frac{1}{3}$ je menší než poloviční požadavek každé z dědiček.

Při dělení dědictví 200 by rovné dělení na $66\frac{2}{3}$ dalo první dědičce více než polovinu a druhým dvěma méně než polovinu jejich nároku; jak je však patrné z obrázku 2, první se zastaví na 50 a zbytek je rozdělen rovným dílem mezi zbývající dvě, které tak dostanou po 75. Podobně při dědictví 300 dostane první dědička jen polovinu svého nároku, tedy 50. Kdyby se nyní zbývajících 250 rozdělilo na rovné díly, dostala by druhá více než polovinu a třetí méně než polovinu svého nároku; druhá proto dostane jen polovinu, tj. 100, a zbytek ve výši 150 připadne třetí. Dědictví 400 již přesahuje polovinu celkového nároku;

v tomto případě budeme sledovat, co chybí. Celkový schodek je 200 a rozdělí se stejně, jako tomu bylo u dědictví 200: první ze svého požadavku ztratí 50, druhé dvě po 75; dědictví je tak rozděleno na díly 50, 125 a 225.

Reference

[1] Franklin J. (2001) *The Science of Conjecture: Evidence and Probability before Pascal.* The Johns Hopkins University Press,Baltimore.

[2] Ore O. (1960) *Pascal and the Invention of Probability Theory.* American Mathematical Monthly **67**, 409 – 419.

[3] Toti Rigatelli L. (1985) *Il "problema delle parti" in manoscritti del XIV e XV secolo.* In: M. Folkerts and U. Lindgren, Eds., Mathemata. Festschrift für Helmuth Gericke, Boethius, 12, Wiesbaden-Stuttgart. Franz Steiner Verlag, 229 – 236.

[4] Franci R. (2002) *Una soluzione esatta del problema delle parti in un manoscritto della prima meta del Quattrocento.* Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche **XXII**, 253 – 259.

[5] Franci R. (2002) *Il problema delle parti nel codice Urb. Lat. 291 della Biblioteca Apostolica Vaticana.* Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche **XXII**, 260.

[6] Meusnier N. (2007) *Le probléme de partis bouge. . . de plus en plus.* JEHPS **3**, No. 1, 127.

[7] Piron S. (2007) *L'apparition du resicum en méditerranée occidentale.* Journal Electronique d'Histoire des probabilités et de la Statistique (JEHPS), `http://www.jehps.net/` **3**, No. 1, 1 – 25.

[8] Aumann R. J., Maschler M. (1985) *Game Theoretic Analysis of a Bancrupcy Problem from the Talmud.* J. Economic Theory **36**, 195 – 213.

[9] Rosenberg J. *Some examples of Mathematical Analysis Applied to Talmud Study.* `http://www.math.umd.edu/users/jmr/MathTalmud.pdf`

[10] Aumann R. J. (2002) *Game Theory in Talmud.* Research Bulletin Series on Jewish Law and Economy. June 2002, No. 4.02.

[11] Kaminski M. M. (2000) *Hydraulic Rationing.* Mathematical Social Sciences **40**, 131 – 135.

[12] Meusnier N. (2007) *Le probléme de partis peut-il etre d'origine arabomusulmane?* JEHPS **3**, No. 1, 1 – 14.

[13] Huyghens Ch. (1657) *De Ratiociniis in Ludo Aleae.* In: F. van Schooten: Exercitationum mathematicarum. Ex officina Johannis Elsevirii.

Poděkování: Tato práce byla podporována granty MSM 0021620839, GAAV IAA100110502 a výzkumným záměrem AV0Z10190503.

PROČ NÁM NEROZUMĚJÍ

Milena Kvaszová

Adresa: Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, CZ – 115 67 Praha 1

E-mail: `milena.sp@centrum.cz`

Klíčová slova: Piagetova teorie kognitivního vývoje, porozumění základním statistickým pojmům, sémantizace, formalizace, strukturalizace.

Abstrakt

V příspěvku se věnuji některým příčinám obtíží při vyučování pravděpodobnosti a statistiky. Vycházím z modelu kognitivního vývoje, který vytvořil Jean Piaget. Podle tohoto modelu je možné ve vývoji určité matematické teorie rozlišit tři stádia, která Piaget pojmenoval INTRA, INTER a TRANS. Žákům často brání v porozumění pravděpodobnosti a statistice to, že pojmy a poznatky z úrovní INTER a TRANS se jim předkládají dříve, než se jim umožní projít prvním stádiem, tj. INTRA.

In the paper there are analysed some of the causes of difficulties that occur in teaching probability and statistics and the model of cognitive development created by Jean Piaget is implemented. According to this model, in the development of a particular mathematical theory we can distinguish three stages which Piaget called INTRA, INTER and TRANS. Pupils are often hindered in the understanding of probability and statistics by the circumstance the notions and knowledge from the stages INTER and TRANS are presented to them before they mastered the first stage, i.e. INTRA.

Úvod

Při výkladu teorie pravděpodobnosti zpravidla postupujeme tak, že začínáme výkladem přesně definovaných pojmů a ucelené teorie, tak jak byla během staletí postupně přepracovávána a upřesňována. Vynecháváme odbočky, které se jeví z dnešního pohledu jako slepé cesty, ale ve své době vedly k hlubšímu pochopení zkoumaných jevů. Na příklad podle osnov z matematiky pro osmý ročník tematický celek věnovaný pravděpodobnosti a statistice začíná pojmy *statistický soubor, statistické šetření, jednotka, znak, četnost* atd. Ve výuce nebereme na vědomí, že matematická (pravděpodobnostní) zkušenost učitele a žáka jsou zcela odlišné. Žáci dovedou sice jevy pozorovat, ale je pro ně obtížné přesně je popsat. Často se musí učit látku, na kterou ještě nejsou zralí [2]. Proto jim nezbývá nic jiného, než se ji bez opravdového porozumění naučit nazpaměť, což samozřejmě vede ke vzniku formálního poznání. Žáci jsou sice schopni si předkládané pojmy zapamatovat, případně se naučit jejich definice, ale mají jenom mlhavou představu, co se za uvedenými pojmy skrývá a už vůbec si je nespojují s pojmy a zkušenostmi z běžného života. Tím se pro ně teorie pravděpodobnosti a statistické metody stávají souhrnem nezapamatovatelných vzorců, které slouží k řešení podivných úloh. V běžném životě je nikdy nepoužijí, protože podle nich s reálnou situací nemají nic společného. Žák postupně získává přesvědčení, že pro pochopení nejistých jevů má člověk zdravý rozum a že teorie pravděpodobnosti se na běžné životní situace nehodí. Tímto způsobem se pravděpodobnost a statistika ze sféry pravděpodobnostního a statistického myšlení přesouvá do oblasti učení. Škola místo statistické a pravděpodobnostní gramotnosti rozvíjí nebo jen zatěžuje paměť.

Na pozadí výše uvedených skutečností se domnívám, že by v žádném případě nebylo „ztrátou času“, pokud by si žáci důkladně „pohráli“ se statistickými soubory, které se jich týkají a jsou jim blízké (*výška postavy, počet sourozenců, barva očí,...*) před tím, než se začnou seznamovat se základními statistickými pojmy. I když se po matematické stránce mnohému nenaučí, dojde k propojení pojmů z pravděpodobnosti a statistiky s jejich životní zkušeností. Některé ze statistických pojmů si tak sami vytvoří při zpracovávání souborů (*aritmetický průměr, medián, modus,...*), zatímco k ostatním si přiřadí konkrétní představu. Tento přístup se ukazuje jako efektivní i ve výuce studentů vysokých škol ekonomického zaměření, jejichž postoj k matematice je často pouze formální. Bohatý materiál k propojení teorie pravděpodobnosti se zkušeností můžeme nalézt v monografii [5].

1. Piagetův model vývinu poznání

Ve své analýze vycházím z modelu poznávacího procesu, který vytvořil Jean Piaget (1896–1980). Podle tohoto modelu je možné ve vývoji určité matematické teorie rozlišit tři stádia, která Piaget a Garcia v knize [4] pojmenovali INTRA, INTER a TRANS. Každou etapu charakterizují kognitivními schopnostmi subjektu. Pokud se na tuto problematiku nebudeme dívat z hlediska schopností, ale z hlediska cílů, které se objevují v konkrétním stupni rozvoje, je přirozenější Piagetova stádia charakterizovat pomocí kognitivních procesů:

1. Ve stádiu INTRA převládá *proces sémantizace,* který můžeme charakterizovat snahou nalézt a vyjasnit základní pojmy, které by umožnily kvalitativně porozumět zkoumané problematice.

2. Ve stádiu INTER převládá *proces formalizace,* který je zaměřen na vytvoření a zdokonalení matematického jazyka, umožňujícího kvalitativní porozumění nahradit přesným kvantitativním popisem jevů.

3. Ve stádiu TRANS převládá *proces strukturalizace,* který se zaměřuje na zobecnění a upřesnění logické stavby vzniklé formalizované teorie, na nalezení předpokladů její platnosti a na vybudování základů pro metody, jež byly do té doby často pouze heuristické.

V procesu *sémantizace* převládá názorná forma uvažování. Pojmy a vztahy mezi nimi se váží na konkrétní představy, a jsou proto převážně kvalitativního charakteru. Žák není schopen vztah upřesnit. Jasně například chápe, že čím je více možností, které mohou nastat, tím je menší pravděpodobnost, že jedna konkrétní nastane, ale nedovede tuto pravděpodobnost vyjádřit číselně. Tento proces upřednostňuje přirozené pojmy, se kterými má člověk bohaté zkušenosti z běžného života. Příkladem takových pojmů jsou: *může se stát, nestane se nikdy, možná se stane, určitě se stane,...* Pojmy se váží na konkrétní obsah, jejich hranice jsou ještě neostré, což může mít za následek interferenci blízkých pojmů a jejich ovlivnění vlastním přáním. Např. *Náš sportovní klub určitě vyhraje pohár! Možná přijdu. Babička nikdy nemůže hrát fotbal.*

V procesu *formalizace* dochází k upřesnění formy. Student se ještě opírá o názorné představy, kreslí obrázky, avšak samotný pojem nebo vztah má už přesnou formální podobu (*např. číselné vyjádření pravděpodobnosti pomocí binomického rozdělení*). Hlavní úlohu začínají hrát pojmy, které napomáhají formalizaci (*střední hodnota, rozptyl, hustota pravděpodobnosti, distribuční funkce, ...*) a tyto pojmy postupně vytlačují pojmy přirozeného jazyka. Kromě toho pojmy díky formálnímu jazyku dostávají ostré hranice, což umožňuje rozlišit sémanticky blízké pojmy (např. *střední hodnota – aritmetický průměr* a *prostřední hodnota – medián*). Formalizmus umožňuje také zrod nového typu vzájemných souvislostí, a to kvantitativních vztahů – „vzorců“. V důsledku toho, že formalizmus přiřadil pojmům matematické objekty, je možné vztahy mezi těmito pojmy vyjádřit v podobě rovnic. Například pomocí binomického rozdělení můžeme určit vztah mezi pravděpodobností P_k, že určitý jev nastane k-krát z n pokusů, a pravděpodobností p tohoto elementárního jevu je

$$P_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

V oblasti pravděpodobnosti však nesmíme zapomínat na to, že vztah mezi modelem a realitou je daleko volnější, než v jiných oblastech matematiky.

Přímé předvedení tohoto vztahu prostřednictvím hodů kostkou nebo mincí musí být součástí výuky, kterou v žádném případě nesmíme vynechat.

V procesu *strukturalizace* se upouští od názornosti a do popředí se dostávají pojmy umožňující jednotící pohled. Z pojmů a vztahů zůstává už jenom nejobecnější, nejabstraktnější, čistě formální stránka. Pojmy ztrácejí svůj konkrétní názorný obsah a redukují se na formální objekt (např. *náhodnou veličinou* X rozumíme reálnou funkci definovanou na množině všech elementárních jevů, která každému jevu přiřadí reálné číslo.) Vztahy teorie začínají být vzájemně propojené pevnou logickou stavbou, založenou na několika principech. Tento přístup umožňuje odhalit souvislosti ležící hluboko pod povrchem jevů, a tedy nepřístupné předchozím dvěma etapám, založeným na názornosti. Příkladem takové souvislosti je Kolmogorovův výklad pravděpodobnosti jako míry a na něm založená axiomatizace teorie pravděpodobnosti.

I v případě, že bude učitel při výkladu postupovat podle výše popsaných etap, může dojít k nedorozumění mezi ním a jeho žáky. Jedním ze zdrojů nedorozumění jsou odlišnosti v oblasti formy. Učitel již završil etapu strukturalizace a zná přesné formální vymezení jednotlivých pojmů a odvození příslušných vztahů. Myslí si, že něco skutečně znát znamená znát to přesně. Když poslouchá argumenty žáků, jasně vidí nepřesnost toho, co říkají. Uvědomuje si, že to, co slyší, jsou polopravdy beznadějně zamotané ve spleti naivních představ. Při odpovědích nebo diskusích nutí žáky k přesnému vyjadřování. V průběhu celé etapy sémantizace však psychika něčeho takového není schopná. Tím žákům násilně vnucuje přechod od sémantizace k formalizaci. Nedovolí jim, aby si na konkrétních příkladech kvalitativně „ohmatali“ pojmy a vztahy teorie. Nemůžeme se pak divit, že žákům chybí sémantický vhled a na jeho místo nastupuje formální technika. Z pravděpodobnosti a statistiky se potom stává „věda o dosazování do vzorců“. Statistické myšlení žáků stagnuje a není překvapením, že základní statistické pojmy nejsou schopni srozumitelně vysvětlit ani studenti vysokých škol ani odborníci, pro něž jsou tyto pojmy nedílnou součástí jejich profese, např. lékaři!

Popsané procesy se vzájemně prolínají. Často objev v rámci formalizmu přináší posun také v oblasti sémantizace (např. *centrální limitní věta odhaluje souvislost mezi binomickým a normálním rozdělením, která je čistě sémantickému pohledu skrytá*) nebo naopak nový sémantický pohled přináší zárodek nového formalizmu. Strukturalizace rozšiřuje formalizmus i sémantizaci. I když se tyto procesy neustále prolínají a vzájemně ovlivňují, je vcelku přirozený názor, že tyto tři procesy následují jaksi za sebou. Člověk by se měl snažit věci nejprve kvalitativně pochopit, potom přesně spočítat a až nakonec popřemýšlet o tom, proč mu vyšlo právě to, co mu vyšlo.

2. Aplikace Piagetova modelu ve vyučování pravděpodobnosti a statistiky

Cílem mého příspěvku je pokusit se aplikovat Piagetovu teorii kognitivního vývinu při analýze procesu vyučování pravděpodobnosti a statistiky. V knize [4] autoři ilustrují tuto teorii na příkladu geometrie, algebry a mechaniky. Proto mým prvním krokem bylo přenesení základních Piagetových pojmů do oblasti pravděpodobnosti a statistiky. Pro každé ze tří Piagetových stádií se snažím nalézt typické příklady.

2.1. Intrafigurální stádium

V tomto stádiu je student schopen sledovat jednotlivé jevy, ale není ještě schopen správně chápat souvislosti. Piaget toto stádium uvádí na příkladu dětských kreseb, kdy dítě umí nakreslit dům, umí nakreslit i komín, ale neumí komín správně umístit na střechu (viz dětský obrázek ze stěny železničního podchodu v Cerhenicích na Kolínsku po prázdninové akci, kdy děti měly možnost vyzdobit tuto plochu svými kresbami).

V pravděpodobnostních úlohách studenti dovedou odhadnout, který jev má větší pravděpodobnost, ale neumějí ji ještě spočítat a vyjádřit v procentech. Např. rozhodnout, zda je pravděpodobnější, že padne 1 šestka při hodu šesti kostkami nebo 2 šestky při hodu dvanácti kostkami.

Toto velice důležité stádium se zpravidla vynechává a teorie pravděpodobnosti se začíná vzorci a výpočtem příkladů. Proto k porozumění jevu pravděpodobnosti dochází až dodatečně, když je vypočteno dostatečné množství příkladů, z nichž se alespoň některé týkají reálných situací.

2.2. Interfigurální stádium

Ve druhém stádiu – interfigurálním – již student plně rozumí souvislostem mezi jevy. Piaget na příkladu dětských kreseb toto stádium charakterizuje tím, že dítě už umí správně posadit komín na střechu domu, ale ještě neumí zachytit pohled někoho jiného, např. jak by namaloval „jeho dům“ soused sedící naproti němu. V pravděpodobnostní úloze studenti umějí vypočítat pravděpodobnosti všech možných výsledků úlohy, ale ještě nejsou schopni výsledek zobecnit.

Při vyučování je zpravidla tomuto stádiu věnována největší pozornost, ale studenti bez předchozího pochopení jednotlivých pojmů v předešlém intrafigurálním stádiu nedovedou výsledky řešených úloh správně interpretovat. Např. na otázku *Co znamená, že průměrná velikost rodiny je 2,5?,* kterou jsem položila studentům vysoké školy ekonomického směru, často odpovídali *dva dospělí a jedno dítě.*

2.3. Transfigurální stádium

Ve třetím stádiu – transfigurálním – student již plně rozumí analogiím, transformacím atd. Dítě už dokáže správně nakreslit dům a umístit na něj komín i z různých pohledů. Studenti v pravděpodobnostní úloze najdou obecné pravidlo, které platí pro zvyšující se počet pokusů.

3. Výsledky výzkumu

Ve své studii jsem se zaměřila na porozumění základním statistickým pojmům a jejich interpretaci. Testům se podrobilo 78 studentů vysoké školy zaměřené na ekonomiku; věkové rozpětí této skupiny bylo od 19 do 50 let. Tito studenti tedy prošli kurzem statistiky na základní škole a v jisté, ovšem hodně odlišné podobě, absolvovali také kurz kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky na škole střední. Zaměřila jsem se na základní statistické pojmy *průměrný, vzorek, náhoda a proměnlivost.* V druhé části testu jsem zjišťovala, jak studenti ovládají práci se *statistickým souborem,* odečítání hodnoty z *grafu,* určování a interpretaci pojmu *aritmetický průměr.*

Studenti odpovídali celkem na 13 otázek typu:
Když někdo řekne, že jste „průměrný“, co tím myslí? Když dostanete „vzorek“, co máte? Uveďte příklad něčeho, co se děje náhodou. Co znamená „proměnlivost“? Uveďte příklad něčeho, co se proměňuje. Co je to průměr? Umíte odhadnout průměrnou životnost každé značky baterií z těchto grafů?

Ukázalo se, že studenti *průměrnou osobu* vnímají jako člověka nevyčnívajícího z davu, vůbec nehodnotili jeho fyzické znaky ani nepřipouštěli, že by mohl v něčem vynikat a v jiném zaostávat. Na otázku *Co je to průměr?* vymýšleli složité, šroubované a leckdy chybné definice, jako kdyby nikdy nepočítali průměrnou známku z předmětu na vysvědčení. Největším „oříškem“ pro studenty byla otázka *Co znamená, že průměrná velikost rodiny je 2,5?* Nejčastější vysvětlení bylo dva dospělí a malé dítě. Naproti tomu odečítání hodnot z *grafu* a odtud výpočet průměrné hodnoty studentům nečinily potíže.

Náhodná jsou zásadně setkání a *náhodou* se dějí katastrofy, nehody a zázraky. (*Co se nám nelíbí, a proto říkáme, že náhodou a co se nám líbí a nezasloužili jsme si to.*) *Počasí* má náhodný charakter, ale objevil se i názor, že *nic se neděje náhodou.* Projevuje se tak kauzální výchova. Za *náhodný jev* studenti považují pouze jev, jehož výsledek je překvapí, sice jej nezapříčinili, ale příčinu má (opět kauzalita). Studenti zaměňují pojmy *proměnlivost,* jako vlastnost a *proměna,* jako určitý děj. Nejproměnlivější je *počasí* a hned potom *nálada.* Zcela výjimečně se proměňujeme i my, fyzicky i psychicky. *Vzorek* ve většině spojují s malým množstvím kosmetiky nebo jídla „na vyzkoušení“. Zde se projevuje vliv reklamy kosmetických firem, které v minibalení rozdávají vzorky svých výrobků.

Své výsledky jsem porovnala s prací australských autorů [7] a nizozemského autora [1], kteří rovněž došli k závěru, že současné školní vzdělání nezlepšuje statistickou gramotnost žáků.

Závěr

Problémy, které brání porozumění pravděpodobnosti a statistiky u žáků, často pramení z toho, že pojmy a poznatky z úrovní INTER a TRANS se studentům prezentují bez toho, aby se studentům umožnilo projít prvním stádiem, tj. INTRA.

Učitel, ve snaze probrat co nejvíce látky (místo toho, aby trpělivě počkal, až pojmy přirozeně dozrají), často přenáší pojmy z vyšší hladiny i do základního výkladu. Složité pojmy přiměřeně zjednoduší, abstraktní ilustruje na několika příkladech a myslí si, že svou úlohu splnil, že učivo studentům přiblížil a oni látku přijmou [3].

Většinou to tak ale není. Studenti se naučí s pojmy jakž takž pracovat, ale nepřijmou je za svoje. Zdají se jim nepřirozené a cizí. Je samotné by nikdy nenapadlo takové pojmy zavádět. Mohlo by se zdát, že podobné pocity nejistoty studentů jsou nepodstatné, hlavně, že se naučili novou látku. Jenomže jde o něco hlubšího. Studentům se dává pocítit, že věda je něco nepřirozeného a cizího, že je dílem jakýchsi podivínů, které napadají věci, jež by obyčejné lidi nikdy nenapadly. Škola takto může nevědomky vytvářet v žákovi pocit méněcennosti a odcizení vůči vědecké práci, ba i vůbec vůči intelektuální práci. V dospělosti se v práci ani v osobním životě nepustí do řešení úloh spojených s pravděpodobností, protože tyto úlohy mu nikdy nešly a hledanou pravděpodobnost pouze odhaduje. Vzorce „spadlé z nebe“ podrývají víru žáků, že tomu, co se dělá na hodině, je možné porozumět. Na hodinách postupně vzniká jakési „mystické“ ovzduší, které zatemňuje zdravý rozum. Student si přestane klást otázky typu „proč je v tom vzorci $1/(n-1)$?“ a stále častěji se spokojí s odpovědí „proto, že to tak bylo na tabuli“. V pozdější době může roli učitele převzít učebnice nebo neosobní autorita vědy. Není důležité, co je touto „poslední instancí“. Podstatné je to, že jí není vlastní rozum, osobní přesvědčení získané na základě argumentů.

Přitom pravděpodobnostní a statistické myšlení bude od žáků požadováno celý život. Je třeba je s ním seznamovat už v raném věku. Nejedná se pouze o jejich profesní život, ale především o jejich soukromé životy. Jeho výuka by proto bez ohledu na osnovy měla být průběžnou snahou všech učitelů, nejen matematiky, od první třídy [6]. Měli by se zaměřit na úlohy z běžného života, *mince a kostky* používat jenom jako modely, a respektovat, že se děti s náhodou a rizikem setkávají již v předškolním věku – v rodině, v dětském kolektivu a i při hrách. Proto se u nich vyvíjí intuitivní chápání nejistoty některých dějů, jistoty či naopak nemožnosti dějů jiných. Rozvoj tohoto intuitivního myšlení je třeba včas správným způsobem ovlivňovat vhodným výkladem, ukazujícím žákům, že se s pravděpodobností a statistikou setkávají v každodenním životě, při dopravě, navazování známostí, utváření vztahů mezi lidmi atd. Už to, že se narodili takoví, jací jsou, je výsledkem souhry komplikovaných náhodních jevů.

Pokud si toto při výuce neuvědomíme, existuje nebezpečí, že životem již ověřené zkušenosti nahradíme formálními školskými pojmy a postupy. Je dobré si stále připomínat výrok Galilea Galilei: *Není možné člověka něco naučit, lze mu pouze pomoci objevit znalosti v něm samém.*

Reference

[1] Akker A. (2004) *Design research in statistics education: on symbolizing and computer tools.* Thesis. Center for Science and Math. Education, Utrecht Univ., Freudenthal Inst.

[2] Kvasz, L. (1997) *Why don't they understand us?* Science and Education, Vol. 6, 263–272.

[3] Kvasz, L. (2008) *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics.* Birkhäuser Verlag AG, Basel.

[4] Piaget J., Garcia R. (1989) *Psychogenesis and the History of Science.* Columbia University Press, New York.

[5] Plocki, A. (2001) *Pravděpodobnost kolem nás. Počet pravděpodobnosti v úlohách a problémech.* Univerzita J. Purkyně, Ústí nad Labem.

[6] Saxl, I. (2005) *Statistické myšlení a jeho výuka.* Pravděpodobnost a statistika na střední škole. Sborník prací didaktického semináře pořádaného MFF UK v Praze. Matfyzpress, Praha, 1–16.

[7] Watson J. M., Kelly B. A. (2003) *The Vocabulary of Statistical Literacy.* AARE 2003 Conference Papers: Internat. Education Res. Conf. Auckland, New Zealand, EJ.

Poděkování: Tento příspěvek vznikl v rámci grantu AV ČR IAA 100110502 a s podporou projektů MSM 0021620839 a AVOZ 10190503.

Ze života společnosti

Ve čtvrtek 19. března 2009 se na MFF UK v Praze konalo bohatě navštívené kolokvium věnované památce ing. Josefa Machka. S přednáškami vystoupila řada kolegů Josefa Machka. Za všechny příspěvky jsme do bulletinu zařadili vzpomínku kolegyně Jitky Zichové.

HRST VZPOMÍNEK NA ING. JOSEFA MACHKA

Jitka Zichová

Adresa: MFF UK, KPMS, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín

E-mail: `jitka.zichoval@mff.cuni.cz`

I když jsem nepatřila k nejbližším spolupracovníkům pana inženýra Machka, jsem mu za mnohé vděčna a ráda bych zmínila pár osobních vzpomínek na cenné chvíle, v nichž se protnul jeho pracovní život s mým.

První z nich mne vrací do období studia v 5. ročníku oboru matematická statistika. Tehdy jsme navštěvovali Machkovu výuku s názvem Speciální přednáška II, starší kolegové si jistě pamatují, že před rokem 1989 byly takové nic neříkající názvy předmětů pro vyšší ročníky běžné. Obsahem přednášky byla statistická analýza biologických zkoušek, ale mně v paměti utkvělo především úhledné písmo vyučujícího na tabuli, zapálený a srozumitelný výklad i shovívavý přístup při zkoušce skládané v situaci, kdy jsme už měli v hlavě blížící se obhajoby diplomových prací a státnice. V té době jsem se ucházela o studijní pobyt na katedře statistiky s vyhlídkou na následnou aspiranturu, ale neměla jsem ani tušení o tom, že se pan inženýr za necelý rok stane jedním z mých prvních rádců a spolupracovníků.

To bylo tak. Na stáž jsem byla přijata a někdy po novém roce 1990, uprostřed porevoluční vřavy a změn na fakultě, mne můj školitel prof. Anděl informoval o letní konferenci pořádané fakultou ve spolupráci s Ústavem teorie informace a automatizace akademie věd. Její název mi zněl velmi vznešeně: 11^{th} Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes. A že pan inženýr Machek tam chystá příspěvek o testu dobré shody pro binomické rozdělení a shání někoho, kdo by mu provedl simulační studie. Stala jsem se tedy Machkovou pomocnicí a práce na společném díle mne moc bavila.

Byla jsem začátečnicí po odborné i jazykové stránce a na některých výrocích pana inženýra, které mám dodnes otištěné v paměti, se pokusím připomenout jeho umění povzbudit a velikou skromnost. Když byly simulace hotové, dostala jsem za úkol sepsat text příspěvku a abstrakt, který jsem jako první předložila ke kontrole. Pan inženýr reagoval dopisem, z něhož si dovolím citovat:

Vážená kolegyně,

přečetl jsem si Vaše resumé článku a myslím, že mu nelze nic vytýkat ani není třeba cokoliv opravovat. Přesto jsem si dovolil navrhnout trochu jiné znění, to Vaše původní, ačkoliv formálně a gramaticky podle mého názoru zcela vyhovující, se mi zdálo trochu příliš skromné, slibující méně než v článku

skutečně máte. Proto jsem si dovolil navrhnout znění, které je — aspoň podle mého mínění — trochu silnější po stránce reklamní (propagační). Můžete si z obou vybrat, které se Vám bude více zamlouvat.
S pozdravem *J. Machek*

Pak následovaly i návrhy oprav vlastního článku, o tom jsme už hovořili osobně. V té době byla naše země zaplavována více či méně kvalifikovanými rodilými mluvčími, emigranty a dalšími osobami, které vyučovaly angličtinu, aby veřejnost rychle dohnala manko ve znalosti světového jazyka č. 1 z předchozích let. A pan inženýr se mne otázal: „Kolikpak jste měla anglických lektorů?“ „Žádného,“ zněla odpověď. „No vidíte, a přece jste to tak pěkně sepsala. Mám jen pár drobností. . . “.

Jak často si na tento rozhovor vzpomenu, když opravuji texty bakalářských a diplomových prací svých svěřenců z jejich těžkopádné a chybující češtiny do její kultivovanější podoby. A zejména, jak se mi již stalo, z češtiny použité cizincem. Tehdy se snažím být podobně taktní a povzbudivá.

Další Machkova slova, která mohu uvést, se vztahují k době bezprostředně před konferencí. Vystoupit jsem měla já, pan inženýr trávil léto ve Filířovicích u Dvora Králové nad Labem, kde jsem jej obtěžovala telefonáty při dolaďování referátu – měla to být má premiéra a hned na tak významné akci! Když jsem prosila, ať mi v den D drží palce, pravil: „A mne tam nezmiňujte, vždyť jste to dávala dohromady sama.“ To jsem samozřejmě dodržet nemohla.

Jinou věcí, která mi byla na panu inženýrovi blízká, byl zájem o dějiny statistiky. Chodila jsem tenkrát na semináře dr. Folty a doc. Bečváře věnované historii matematiky a pan inženýr Machek byl jedním z mála, kteří občas přispěli do programu kapitolou z dějin naší disciplíny. V poslední době jsem trochu pátrala po pražské statistice v druhé polovině 19. století a je mou velkou radostí, že mohu svými skromnými výsledky na Machkovu činnost v této oblasti navázat.

O nějaký rok později, už jako členka oddělení finanční a pojistné matematiky na katedře statistiky, jsem byla jmenována do komise pro státní závěrečné zkoušky bakalářského studia oboru finanční matematika, v níž působil i pan inženýr Machek. Zkoušíval statistiku, která bývá na zmíněném oboru největším kamenem úrazu. Vzpomínám, že se vždy snažil, vlídně a beze spěchu, vytáhnout pozapomenuté vědomosti i z těch nejméně připravených studentů, někdy to věru byl tvrdý oříšek! Pro mne to ale bylo velmi inspirativní, usiluji o to být stejně přátelská, ale i spravedlivá při svém zkoušení.

V pauzách těchto státnicových maratonů jsme se pokoušeli různým způsobem odreagovat a tady musím zmínit další spojovací bod s panem inženýrem. Byla jím španělština, kterou jsem se tehdy učila. Pamatuji si, jak mi v přestávkách mezi zkoušením rozšiřoval slovní zásobu ve španělštině vyprávěnými vtipy – a tak mi na závěr dovolte u jednoho se zastavit. Nejlépe vyzní v originále, neboť je založen na podobnosti slov; pro ty, kteří jazyk neznají, nechť dokumentuje jeho zvukomalebnost.

Dva muži pojídají rychlý oběd vestoje u malého stolku, jeden z nich má přitom hlavu zabořenou v novinách. Na otázku spolustolovníka reaguje pohotovou odpovědí:

Se divierte Usted entre comidas?

No, me divierto entre comillas!

Volné přetlumočení do češtiny by mohlo znít:

Bavíte se nad sousty oběda?

Ne, bavím se nad sousty bulváru!

Ve španělštině jde o hříčku se slovy comidas (jídla) a comillas (uvozovky), je tedy řeč o zábavě nad jídlem a „zábavě" pouze v uvozovkách.

A tak Vám, pane inženýre, tam kde teď jste, za vše děkuji a přeji, abyste se tam bavil, a nejen v uvozovkách, ale doopravdy, nad tím kolik mladých následovníků na katedře máte a jak se Vaše oblíbená statistika rozvíjí.

ODEŠEL PROFESOR STANISLAV KOMENDA

Rudolf Chlup

Adresa: Univerzita Palackého, Olomouc

E-mail: `rudolf.chlup@fnol.cz`

1. Prolog

V úterý 17. února 2009, v padesátém roce svého působení na Univerzitě Palackého a ve Fakultní nemocnici Olomouc, zemřel prof. RNDr. Stanislav Komenda, DrSc. Pro II. interní kliniku Fakultní nemocnice je ctí, že dostala příležitost poskytnout v posledních třech týdnech panu profesorovi zázemí, když všechny možnosti aktivní léčby jeho nemoci byly vyčerpány.

2. Letmé poohlédnutí do života

Stanislav Komenda se narodil 7. května 1936 v Louce, okres Třebíč. V rodné vsi vychodil jednotřídku, v sousedním královském (jedná se o Přemysla Otakara II.) městečku Jemnici další část základní školy a v Moravských Budějovicích pak ty ročníky reálného gymnázia, které přežily reformu jednotné školy v roce 1948. Po maturitě (1954) a jistých kádrových štrapácích byl přijat na Vysokou školu ekonomickou v Praze, odkud přešel – protože mu nedošlo, že po třiceti pěti letech bude opět v Čechách zaveden kapitalismus a s tím spojená výhodnost národohospodářského vzdělání – na Matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy. Zde promoval v roce 1959 v oboru teorie pravděpodobnosti a matematická statistika, což rozhodlo o tom, že jej celý zbytek života bude živit Náhoda – dáma spíše tajemná a své vyznavače nijak zvlášť nerozmazlující.

Po promoci nastoupil na Lékařskou fakultu Univerzity Palackého, kde při svém konservatismu vytrval do konce života, to jest padesát let. Působil jako konzultant v oblasti biostatistických analýz, zejména pro kliniky a pracovníky biomedicínského výzkumu – a jako pedagog, přednášející dílčí obory aplikované statistiky na všech fakultách univerzity, s výjimkou práv a teologie. Vědecké hodnosti získal na Univerzitě Karlově: RNDr. (1973) na Matematicko-fyzikální fakultě, CSc. (1979) na Pedagogické fakultě a DrSc. (1991) na Filozofické fakultě. Na domácí univerzitě se habilitoval (1990, 1991) a získal profesuru (1993). V letech 1991 – 1992 vykonával činnost prorektora pro vědu a výzkum, po dva roky (1994 – 1995) zastával na půl úvazku funkci vedoucího katedry politologie a evropských studií na Filozofické fakultě Univerzity Palackého.

Odborná publikační činnost zahrnuje na sedm set článků, osm monografií (jednu anglickou, dvě v ruštině vydané v Moskvě, jednu přeloženou z angličtiny), patnáct učebních textů, skript a miniskript.

Absolvoval zahraniční pobyty: na Ústavu antropologie Lomonosovovy univerzity v Moskvě (1978, tři týdny), na Dublin Institute of Technology (1993, tři měsíce) a na Virginia Commonwealth University v Richmondu v USA (1997, 1998, šest týdnů). Na odborných konferencích přednášel asi na třiceti místech Evropy a Ameriky.

Vlastní výzkumná práce se soustřeďuje do oblastí aplikované antropometrie (velikostní soustava oděvů a obuvi, indexy tělesné hmotnosti), matematické psychologie (modely učení) a edukometrie (pravděpodobnostní modely testování znalostí). Překládal z angličtiny, němčiny a ruštiny.

Působil v řadě odborných společností – Jednotě českých matematiků a fyziků, České statistické společnosti, České antropologické společnosti, Lékařské společnosti J. E. Purkyně, New York Academy of Sciences (NYAS), Internationale Gesellschaft für Ingenieurpädagogik (IGIP), Společnosti pro vědy a umění (SVU).

Literárně činný byl i v oblasti „malých“ žánrů: verše (sbírky *A všechny nepotkáš,* 1988; *Vzpomínky na bílé noci,* 1988; *Adame, jablko za nic nemůže,* 1989; *Soukromá železná neděle,* 1990; *Drápkem uváznout,* 1992; *Neprozřetelná nalézání,* 2000; *Důchodní deník,* 2000), rozhlasové hry (*Jménem zákona,* *Archimede; Druhá zkouška; Revize případu Prokrustes* a jiné), bajky (*Saze na nose,* 1990), aforismy (*Myšlenky 9,* 1997, a účast ve svazcích *Myšlenky 1 – 2; Laskavé ubližování,* 1998, *Křížem krážem,* 1999; *Veřejné tajemnosti,* 1999; *Předpověď ve znamení Býka,* 1999; *Občané a páni,* 1999; *Jména podstatná a ta ostatní,* 1999), eseje a aforismy (*Poločas zapomínání,* 1998), eseje a fejetony (*Obrana průměrnosti,* 1999). Tvorba od roku 1999 zahrnuje tituly *Štěstí od tří do šesti* (1999), *Věrnost na nečisto* (2001), *Důkaz sporem* (2002), *Na půlnoční straně* (2002), *Motýl ve čtvrtém poschodí* (2003), *Proti proudu* (2003), *Poselství kulhavého běžce* (2003), *Zastav se, až půjdeš kolem* (2003), *Návrat nevyžádán* (2004), *Vzdušné zámky, větrné mlýny, aforismy a epigramy* (2005), *Čtverce nad přeponou* (2006), *Bažanti na dubech* (2007), *Hry & hrátky* (2008) a další. Verše a zejména aforismy publikoval také časopisecky. Spolupracoval s rozhlasem.

V letech 1988 – 1990 vydával časopis *Pacemaker* nákladem Lékařské fakulty Univerzity Palackého a Fakultní nemocnice v Olomouci.

Spolupracoval s nakladatelstvími Melantrich, SPN, s olomouckými nakladatelstvími Votobia, FIN, s Vydavatelstvím Univerzity Palackého, s nakladatelstvím ALDA, s brněnským vydavatelstvím Nehyba a s Nadací Universitas Masarykiana.

Stanislav Komenda byl členem Obce českých spisovatelů. Je zmíněn ve třetím vydání *Kdo je kdo v České republice na přelomu 20. století* (1998) a v několika encyklopediích zahraničních (*Marquis Who is Who in the World, Marquis Who is Who in World Science and Engineering, Who is Who der Ingenieurpädagogik, Outstanding People of the 20th Century, Dictionary of International Biography, 2000 Outstanding Scholars of the 20th Century*).

3. Stanislav Komenda o sobě – únor 2006

Je mi sedmdesát. Pocházím ze selské rodiny, kde se hodně četlo, dost často tajně, protože čtení kolidovalo s prací dětí na polích a v maštali. Mou četbu jakž takž usměrňoval školní program. Na univerzitě jsem byl zahlcen matematikou náhody. Kontakt s beletrií mi pomáhala udržovat má budoucí žena, tehdy studentka knihovnictví. Jako čtenář jsem byl v podstatě anarchista, gourmand i gourmet. Žrout i labužník. Můj vztah ke krásné literatuře ovlivnilo poznání, že tato se může stát nástrojem společenské lži. Pak už jsem si nikdy literaturu neidealizoval ani neabsolutizoval. Poznal jsem, že nic lidského jí není cizí.

V každém případě je psaní činnost, která se nedá provozovat s myslí lhostejnou. Chce to zaujetí, směřování k cíli. Vědomí, že se najde alespoň několik čtenářů toho, co napíši, mi dělá dobře.

Už řadu let při návštěvách přátel nosím v kapse knížku místo kytek či bonboniér. Když mne před více než pěti roky Osud obšťastnil mozkovou mrtvicí, sebral jsem zbylé síly a kontroval mu napsáním dvou knížek z prostředí života a smrti, zdraví a nemoci, nemocných a zdravotníků. Když jsem zjistil, že tu a tam nějaká sestřička zařadila takovou mou knížku do seznamu studijní literatury pro svou diplomovou, bakalářskou, magisterskou či doktorskou práci, míval jsem pocit, že jsem na světě nebyl zbytečně. Už třetím rokem vydávám autorský internetový měsíčník Liber catenatus s podtitulem Úvahy o životě a přilehlém okolí na adrese `http://liber.upol.cz/`.

V posledních letech bilancuji výsledky svého života, k čemuž patří i bilance literární. Samozřejmě si uvědomuji, že všechno lidské je pomíjivé. Zejména v kontextu lidského jedince. Jenomže i pomíjivost má svou kvantitu, měřitelnou časem vyprchání paměťové stopy, časem exspirace. *Nehodlám proti svému stáří bojovat, stejně jako nebudu stavět hradby proti příchodu smrti.* Ale rád bych odešel stejně jako onen vysloužilý voják, který na její pozvání Smrti odpověděl – Ano, teta, půjdu, ale nejdřív dopiju!

4. Epilog

Chtěl jsem napsat biografii profesora Stanislava Komendy. Proto jsem shromažďoval a pracně dával dohromady fakta o jeho životě. Nakonec jsem objevil, že pan profesor to již sám před lety napsal – a v mnohem dokonalejší a čtivější formě, dokonce i ve 3. osobě – jako by to pro někoho připravoval! A tak jsem si dovolil jeho texty s nepatrnými časovými úpravami převzít. Přidal jsem vlastně jen Prolog a tento Epilog. Přitom jsem si uvědomil, že myšlenky a podněty statistiků nejeden vědecký pracovník vydává za své vlastní, aniž by statistika považoval za spoluautora. Kolik vědeckých hodností bylo získáno díky moudrosti statistiků, kteří oficiálně nejsou mezi „spolutvůrci“ uváděni! Podrobnější informace o díle profesora Komendy lze nalézt pomocí vyhledávačů (např. Google) na internetu.

Při rozhovorech s panem profesorem stály obvykle v popředí vědecké problémy. Věcně hodnotil fakta a hledal souvislosti. Jen v jednom směru jsem rozpoznával jeho lítost: že se nevěnoval více svým dětem Sylvě, Evě a Markétě …

V létě roku 2008 profesor Komenda jako školitel revidoval dizertační práci své poslední doktorandky.

V prosinci 2008 zavěsil na webové stránky Univerzity Palackého Liber catenatus č. 60, se slovy „To je poslední, více již nestihnu.“

Vánoce trávil s rodinou doma.

Ve středu 28. ledna byl přijat k hospitalizaci a do druhého dne vyslovena dosud nepotvrzená nepříznivá diagnóza. Všem bylo jasné, že pravděpodobnost vybudování či upevnění hradeb proti příchodu smrti se blíží nule.

V pátek 30. ledna mě vyzval, abych mu přečetl svůj článek, o jehož korekturu jsem ho již dříve žádal. Po kritické úpravě některých vět mě povzbudil k jeho uveřejnění. V pondělí 9. února mu udělalo radost uznání rektora Univerzity Palackého za mimořádné výsledky vědecké práce v oblasti pedagogiky.

Poslední hradba padla 17. února 2009 dopoledne. Ale město, tedy dílo pana profesora Komendy touto hradbou dosud obklopované, zůstává! Kéž vzkvétá . . .

ZA PROFESOREM JAROSLAVEM JÍLKEM

Jaroslav Češka, Jan Friedlaender

Adresa: Český statistický úřad

Smutná zpráva o náhlém úmrtí prof. J. Jílka dne 7. listopadu 2007 zveřejněná v Bulletinu České statistické společnosti č. 4, 2007 zapůsobila velmi silně na všechny jeho přátele a spolupracovníky, a to jak na VŠE, tak i v orgánech oficiální statistiky. Mnozí z nás jsme měli možnost blíže poznat jeho osobní – charakterové i pracovní – kvality při přípravě různých statistických materiálů a publikací.

Nekrolog k jeho úmrtí podává velmi zhuštěnou charakteristiku jeho bohaté publikační činnosti na úseku ekonomické statistiky. Podrobnější popis jeho přínosu přesahuje zjevně rámec tohoto Informačního bulletinu a nelze se jednotlivě jeho publikacemi zabývat.

Přesto bychom rádi upozornili členy ČStS a další čtenáře Informačního bulletinu naší společnosti na jeho poslední statistickou publikaci „Ekonomické a sociální indikátory – Od statistik k poznatkům“, kterou připravil k vydání krátce před svým úmrtím. Tato skutečnost není všeobecně známa, neboť uvedená kniha je teprve po krátkou dobu nabízena k prodeji v příslušných prodejnách[1].

V uvedené publikaci, kterou prof. Jílek připravil jako autor většiny kapitol spolu s docentkou Jiřinou Moravovou, CSc. a vkladem některých vedoucích pracovníků ČSÚ, je výklad v deseti kapitolách zaměřen na vznik statistických informací, měření inflace, ekonomické makroagregáty, spotřebu domácností,

[1] Publikaci Ekonomické a sociální indikátory – Od statistik k poznatkům (Jaroslav Jílek, Jiřina Moravcová), ISBN 978-80-86844-29-9 lze zakoupit také v prodejně ekonomické literatury Vysoké školy ekonomické v Praze a v prodejně Českého statistického úřadu.

trh práce, odvětvové statistiky, obchodní a platební bilance, služby pro kolektivní spotřebu, produktivitu a prostorové srovnávání.

Kniha J. Jílka a J. Moravové zaplňuje dlouhodobou mezeru v učebnicích ekonomické a sociální statistiky. Jejím značným přínosem je i to, že spolu s teorií statistického zkoumání významných jevů a procesů v předmětné oblasti přináší i výklad o zdrojích statistických dat, formách jejich prezentace v publikacích oficiální statistiky, včetně jejich vazeb na metodiku a zpravodajské povinnosti vůči statistickému orgánu Evropské Unie.

Jak ukazují i dříve publikované poznatky z výuky statistiky v České republice (viz např. Sborník prací semináře STAKAN aj.) i kontakty s uživateli ve statistických i jiných knihovnách a institucích, studující i další uživatelé vykazují mnohdy určité mezery ve znalostech o zdrojích statistických dat a existenci důležitých statistických publikací. Takové poznatky, podle našeho názoru, se netýkají jen kategorie nestatistiků.

Apelujeme proto na naše kolegy přednášející statistiku a zajišťující její výuku na vysokých a dalších školách, aby zařazovali do svých úvodních přednášek i příslušné informace o zdrojích statistických dat a důležitých publikacích oficiální statistiky vydávaných ČSÚ i dalšími institucemi a rozšířili tak praktické znalosti posluchačů a studentů i v tomto směru. Týká se to samozřejmě i mezinárodních statistických publikací, ročenek apod.

Se statistickými údaji, ekonomickými a sociálními indikátory se totiž běžně setkáváme ve všech sdělovacích prostředcích, přičemž jejich interpretace je mnohdy zavádějící a neúplná.

VYDALO SE NA VŠE

Josef Arlt, Markéta Arltová, Ekonomické časové řady, Professional Publishing, 2009, 290 stran.

Kniha se zabývá základními teoretickými a praktickými aspekty modelování ekonomických a finančních časových řad. Objasňuje principy lineárních a nelineárních modelů jednorozměrných i vícerozměrných ekonomických časových řad a jejich praktické aplikace. V každé kapitole je za výkladem teorie zařazena část s praktickými příklady.

Publikace je určena studentům ekonomických oborů a pracovníkům hospodářské praxe, kteří mají znalosti základních principů statistiky a pravděpodobnosti a zkušenosti s prací se statistickým a ekonometrickým softwarem. Pro výpočty a grafy uvedené v příkladech byl použit především programový systém GiveWin2, částečně též systém TSM.

Hana Řezanková, Dušan Húsek, Václav Snášel, Shluková analýza dat (druhé rozšířené vydání), Professional Publishing, 2009, 218 stran.

Začátkem roku 2009 bylo uvedeno na trh druhé rozšířené vydání této publikace, v níž autoři uvádí čtenáře do problematiky shlukové analýzy. Čtenář se postupně seznámí s problematikou měření podobnosti a se základními metodami shlukování. Významnou součást knihy tvoří biologicky inspirované algoritmy – umělé neuronové sítě a genetické algoritmy. Největším rozšířením druhého vydání je zařazení části týkající se výběru vhodné metody a stanovení počtu shluků.

Kniha obsahuje ukázky z programových systémů S-PLUS, SPSS, STATISTICA a SYSTAT, které se v oblasti implementace metod shlukové analýzy vyznačují specifickým zaměřením na určité typy algoritmů. Seznam literatury byl doplněn o nejnovější monografie zaměřené na shlukování dat.

Pozvánka na akce společnosti

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

výbor společnosti si Vás dovoluje pozvat na společnou slovensko-českou konferenci *PRASTAN 2009*, jež se koná ve dnech 10. – 12. června 2009 v Kočovcích na Slovensku. Více informací lze nalézt na adrese `http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/PRASTAN09`

Též zveme na *Třetí hradecké statistické dny,* jež se budou konat ve dnech 22. – 23. 9. 2009 v prostorách katedry matematiky Univerzity Hradec Králové, Kozinova ulice (za Boromeem u zimního stadionu) od 10 hodin v místnosti D4. Konference se bude zabývat aplikacemi statistických metod a metod fuzzy matematiky v humanitních vědách. Zájemci nechť se přihlásí na adresu `zdenek.pulpan@uhk.cz`