

# Informační Bulletin



České Statistické Společnosti

číslo 1, ročník 15, červen 2004

## Statistické hodnocení nápovědy

*Jiří Anděl, Karel Zvára, MFF UK Praha*

### 1 Chcete být milionářem?

Ve známé televizní soutěži „Chcete být milionářem?“ se vyskytla otázka: Jak se říká bílému koni s malými oválnými tmavými skvrnami? Jako odpovědi bylo nabídnuto:

|              |            |
|--------------|------------|
| A: jablečňák | C: třešňák |
| B: hrušňák   | D: višňák  |

Soutěžící sdělil, že nemá ani potuchy, a požádal o pomoc publikum. Publikum se přiklonilo k variantě C, která získala 45 % hlasů. Ostatní tři varianty dostaly asi po 18 % hlasů, tedy ke každé z nich se přiklonil zhruba stejný podíl publika. Soutěžící na základě této informace zvolil variantu C.

Tyto informace jsou jen motivací pro následující problém. Představme si, že v publiku sedí  $n$  lidí. Soutěžící se na ně obrátí s žádostí o pomoc. Řekněme, že pro nějakou odpověď hlasuje  $x$  lidí, zatímco pro každou ze zbývajících tří odpovědí hlasuje  $(n - x)/3$  lidí. Soutěžící si může položit otázku, jak velké  $x$  musí být, aby měl rozumnou záruku, že už nejde jen o náhodný výkyv při zcela náhodném vybírání ze čtyř možností.

### 2 Analyzujte Pearsonovu statistiku!

Předpokládejme, že každý z  $n$  lidí se náhodně rozhoduje pro jednu ze čtyř nabídnutých odpovědí. Nechť  $X_i$  lidí hlasovalo pro  $i$ -tou odpověď. Testujme hypotézu, že pravděpodobnost volby kterékoli odpovědi je rovna  $1/4$ . Asi nejjednodušší je použít test  $\chi^2$  při známých parametrech. Použijeme vzorec (10.8) uvedený na str. 155 v knize Anděl (2003), který zní

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \frac{X_i^2}{p_i} - n. \quad (1)$$

Zde  $k = 4$  je počet tříd a  $p_i = \frac{1}{4}$  pro  $i = 1, \dots, 4$ , pokud platí hypotéza  $H_0$ , že lidé v publiku volí odpovědi zcela náhodně. Má-li jedna z tříd četnost  $x$  a každá ze zbývajících tří tříd četnost  $(n - x)/3$ , pak

$$\chi^2 = \frac{4}{n} \left[ x^2 + 3 \frac{(n - x)^2}{9} \right] - n. \quad (2)$$

Jde o to, při jakém  $x$  bude dosaženo kritické hodnoty. Označíme-li  $c = \chi_3^2(0,05) = 7,86$ , máme rovnici

$$\frac{4}{n} \left[ x^2 + 3 \frac{(n - x)^2}{9} \right] - n = c.$$

Pro jednoduchost zanedbáme diskrétní povahu hodnot  $x$ . Proto řešením rovnice je

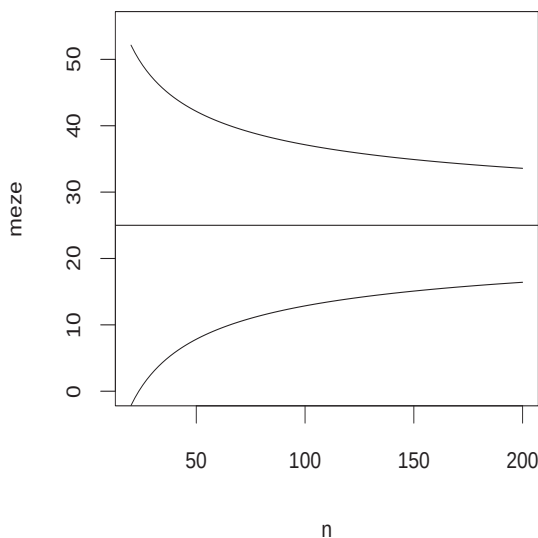
$$x_{1,2} = \frac{n}{4} \pm \frac{\sqrt{3nc}}{4}.$$

Protože se však uvádějí procenta, máme pro ně meze

$$p_{1,2} = 25 \left( 1 \pm \sqrt{\frac{3c}{n}} \right).$$

Nedivme se, že jsou dvě řešení. Hodnota  $p_1$  odpovídá případu, kdy jedna třída má vyšší četnost a ostatní tři třídy stejnou menší četnost. Signifikance se však dosáhne i tehdy, když jedna třída má poměrně malou četnost a zbývajících tři třídy stejnou větší četnost.

Průběh  $p_1$  a  $p_2$  jakožto funkcí proměnné  $n$  je znázorněn na obr. 1. Pro jednoduchost i veličina  $n$  je zobrazena jako spojitá proměnná.



Obrázek 1: Hodnoty  $p_1$  a  $p_2$

Televize nesděluje, kolik lidí v publiku hlasuje. Výsledky jsou uváděny jen v procentech. Přitom  $p_1 = 45$  vyjde pro  $n = 37$ . Je-li tedy přítomno alespoň 37 lidí, je hodnota 45 % signifikantní. Podle jedné informace, kterou se podařilo získat, je prý v publiku

120 lidí. V takovémto případě by byla signifikantní již hodnota 36 %, která odpovídá 43 hlasujícím pro tuto nejčetnější třídu.

### 3 Je třeba optimalizovat.

Nyní prozkoumáme případ, kdy četnosti ostatních tří tříd nemusí být stejné. Řekněme, že četnost jedné třídy je dána, např.  $X_4 = x_4$ . Pak musí platit  $X_1 + X_2 + X_3 = n - x_4$ . V případě vzorce (1) při  $p_i = 1/4$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) máme

$$\chi^2 = \frac{4}{n}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + x_4^2) - n.$$

Označme  $a = n - x_4$ . Pak

$$X_1 + X_2 + X_3 = a. \quad (3)$$

Je známo, že aritmetický průměr je menší nebo roven geometrickému průměru a rovnosti je dosaženo právě tehdy, jsou-li všechny hodnoty stejné (viz Anděl 2003, věta 1.5 na str. 14). Proto platí

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \leq \sqrt{\frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{3}}. \quad (4)$$

Do levé strany vzorce (4) dosadíme z (3) a dostaneme

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \geq \frac{a^2}{3}.$$

Vzhledem k podmínce (3) je rovnosti dosaženo právě tehdy, je-li

$$X_1 = X_2 = X_3 = \frac{a}{3}.$$

Z toho plyne, že

$$\chi^2 \leq \frac{4}{n} \left( x_4^2 + \frac{a^2}{3} \right) - n.$$

Pravá strana odpovídá vzorci (2). Můžeme tedy shrnout, že když je některá z četností pevně dána, pak hodnota statistiky  $\chi^2$  je minimální, když jsou četnosti zbývajících tří tříd stejné. Z toho však plyne následující závěr. Je-li hodnota statistiky  $\chi^2$  uvedená ve vzorci (2) signifikantní, byla by signifikantní i hodnota  $\chi^2$  uvedená ve vzorci (1) počítaná bez předpokladu, že četnosti ostatních tří tříd jsou stejné.

Dále se budeme zabývat otázkou, jaké maximální hodnoty může dosáhnout statistika  $\chi^2$  uvedená ve vzorci (1), je-li dána největší četnost. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že  $X_4 = x_4$  je ta největší četnost. Opět označíme  $a = n - x_4$ . Přitom budeme předpokládat, že  $a > 0$ . Hledejme maximum funkce  $h(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  za podmínek  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = a$ . Funkce  $h(x_1, x_2, x_3)$  udává vzdálenost počátku souřadnic od bodu  $(x_1, x_2, x_3)$ , který leží v rovině  $x_1 + x_2 + x_3 = a$  a patří do prvního oktantu. Tato vzdálenost bude maximální, když bod  $(x_1, x_2, x_3)$  bude ležet na některé z os. Zvolíme-li třeba  $x_2 = x_3 = 0$ , dostaneme  $x_1 = a$  a  $h(a, 0, 0) = a$ . Proto za daných podmínek máme  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq a^2$ . Pro hodnotu  $\chi^2$  uvedenou ve vzorci (1) při  $X_4 = x_4$  máme

$$\chi^2 = \frac{4}{n}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + x_4^2) - n = \frac{4}{n}[(n - 4)^2 + x_4^2] - n.$$

Abychom zajistili, že  $X_4$  je maximální četnost, musí platit  $n - X_4 < X_4$ , tedy  $X_4 > n/2$ . Např. při  $n = 120$  a  $X_4 = 61$  by se maximální hodnota statistiky  $\chi^2$  dosáhla pro  $X_1 = 59$ ,  $X_2 = X_3 = 0$  a činila by

$$\chi^2 = \frac{4}{120}[59^2 + 61^2] - 120 = 120,0667.$$

Při hledání maxima funkce  $h(x_1, x_2, x_3)$  jsme se mohli omezit jen na taková  $x_i$ , která jsou shora omezena konstantou  $c$ . Motivem může být třeba představa, že příliš mnoho příznivců některé z menších četností může u soutěžícího vzbuzovat nedůvěru k nejčetnější třídě. V dalších úvahách bude někdy výhodné explicitně zapsat funkci  $h$  jako funkci dvou proměnných. Tím bude umožněno i snadné grafické znázornění.

Zajímají nás tedy extrémy funkce

$$h^*(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (a - x_1 - x_2)^2} \quad (5)$$

za podmínek

$$0 \leq x_1 \leq c, \quad (6)$$

$$0 \leq x_2 \leq c, \quad (7)$$

$$0 \leq a - x_1 - x_2 \leq c. \quad (8)$$

Poslední omezení bude vhodné zapsat jako horní a dolní omezení pro součet  $x_1 + x_2$

$$x_1 + x_2 \leq a, \quad (9)$$

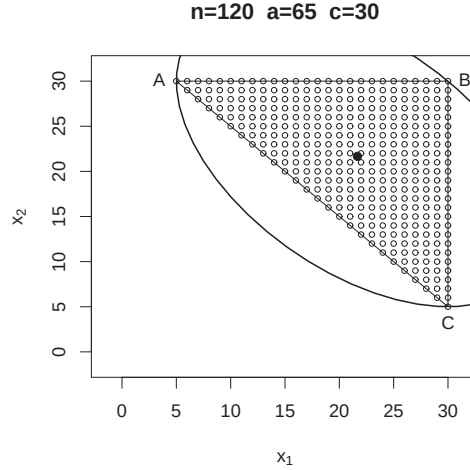
$$x_1 + x_2 \geq a - c. \quad (10)$$

Omezení (9) je ekvivalentní s požadavkem  $x_3 = a - x_1 - x_2 \geq 0$ . Podobně omezení (10) nahrazuje požadavek  $x_3 \leq c$ . Horní omezení na  $x_i$  nesmí být příliš přísné, abychom mohli vyhovět požadavku  $x_1 + x_2 + x_3 = a$ . Proto se budeme dále zabývat jen případem  $c \geq a/3$ .

Označme symbolem  $\mathcal{M}$  množinu reálných čísel  $x_1, x_2$  splňujících (6), (7), (9), (10). Předpoklad  $c \geq a/3$  zaručuje, že bod  $(x_1, x_2)$  patří do  $\mathcal{M}$ , takže dříve zjištěné minimum je minimem i při omezení na  $x_i$  shora.

Zajímavější je hledání maxima  $h^*(x_1, x_2)$  na  $\mathcal{M}$ . Z teorie matematického programování plyne, že maximum funkce  $h^*$ , která je součtem pozitivně definitní kvadratické formy a lineární funkce, na omezené konvexní množině nastává v krajních bodech této množiny. Podle hodnoty  $c$  jsou tři možné tvary množiny  $\mathcal{M}$ , jak dále podrobněji ukážeme. Uvedeme přitom souřadnice krajních bodů této množiny, přičemž je vždy zapíšeme jako argument původní funkce  $h(x_1, x_2, x_3)$ , tedy jako trojici, kde  $x_3 = a - x_1 - x_2$ . Typické situace jsou znázorněny na obrázcích 2, 3 a 4. Body množiny  $\mathcal{M}$  s celočíselnými souřadnicemi tam jsou vyznačeny prázdnými kolečky. Plné černé kolečko uvnitř každého obrázku znázorňuje bod o souřadnicích  $x_1 = x_2 = a/3$ , ve kterém funkce  $h^*$  nabývá svého minima. Elipsy či jejich části označují množinu těch bodů  $(x_1, x_2)$ , kde funkce  $h^*$  nabývá stejné hodnoty jako je její maximum na  $\mathcal{M}$ . Podle velikosti čísla  $c$  je třeba rozlišovat tři případy.





Obrázek 2: Množina  $\mathcal{M}$  pro  $a/3 \leq c \leq a/2$

**a)**  $a/3 \leq c \leq a/2$

V tomto případě se omezení (9) neuplatní, neboť je důsledkem (6) a (7). Krajiní body množiny  $\mathcal{M}$  mají po řadě souřadnice (včetně  $x_3$ )

$$A = (a - 2c, c, c), \quad B = (c, c, a - 2c), \quad C = (c, a - 2c, c).$$

Tento případ je znázorněn na obr. 2.

**b)**  $a/2 < c < a$

Uplatní se všechna omezení, takže je celkem šest krajních bodů

$$\begin{aligned} A &= (0, c, a - c), & B &= (a - c, c, 0), & C &= (c, a - c, 0), \\ D &= (c, 0, a - c), & E &= (a - c, 0, c), & F &= (0, a - c, c) \end{aligned}$$

(viz obr. 3).

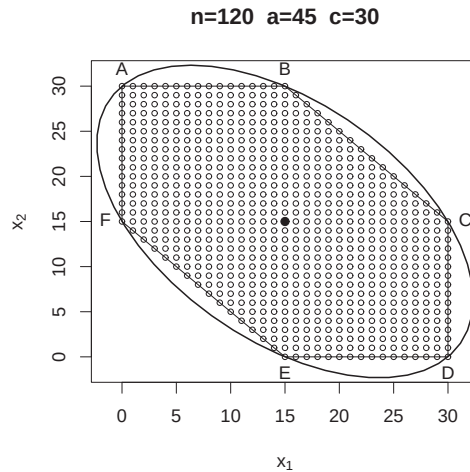
**c)**  $c \geq a$

Tentokrát se omezení konstantou  $c$  neuplatní, takže zůstane v platnosti dříve popsané řešení. Krajiními body jsou

$$A = (0, a, 0), \quad B = (a, 0, 0), \quad C = (0, 0, a).$$

Tento případ vidíme na obr. 4.

Nyní je zřejmé, že ve všech případech jsou souřadnice všech krajních bodů permutacemi souřadnic prvního z nich. Protože je maximalizovaná funkce  $h$  v těchto třech argumentech symetrická, jsou nutně identické její funkční hodnoty vždy ve všech krajních bodech.



Obrázek 3: Množina  $\mathcal{M}$  pro  $a/2 < c < a$

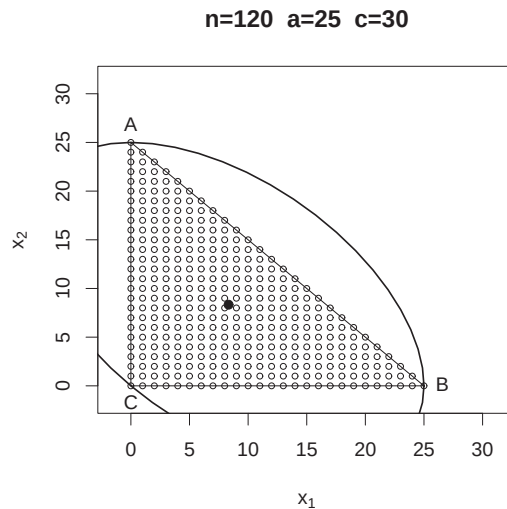
#### 4 Počítejme přesně.

Moderní výpočetní prostředky umožňují dospět k přesným výsledkům. Začneme s případem  $n = 37$ . Protože 45 % z tohoto počtu činí 16,65, mohli bychom začít s příslušnou zaokrouhlenou hodnotou  $x = 17$ . Ta však nevyhovuje, protože číslo  $37 - 17 = 20$  není dělitelno třemi, a tak četnosti ve zbylých třech třídách by nemohly být stejné. V úvahu tedy přichází číslo  $x = 16$  a případně jeho „sousedé“ 13 a 19. Podmíněnou pravděpodobnost, že největší četnost bude větší nebo rovna číslu  $x$ , za podmínky, že četnosti ostatních tří tříd jsou stejné, vypočteme třeba pomocí programu R. Definujeme funkci

```
pstA <- function(x,n,p=rep(0.25,4)){
#     pst, ze max_j N_j >= x v multinomickem rozdeleni pro k=4
#     za podmínky, ze ostatní cetnosti jsou stejne a mensi nez x
#     p jsou psti multinomickeho rozdeleni
#     pro vypocet podmínene psti staci umistit maximalni cetnost
#     do posledni tridy vzhledem k symetrii
pst0 <- pst1 <- 0
for (i in 0:floor((n-1)/4)){# cyklus přes stejne male cetnosti
  pst <- dmultinom(c(i,i,i,n-3*i), prob=p)
  pst0 <- pst0 + pst
  if (n-3*i >= x) pst1 <- pst1 + pst
} # konec cyklu přes i
pst1/pst0 }
```

a vypočteme několik těchto pravděpodobností:

```
> pstA(13,37)
[1] 0.3304183
> pstA(16,37)
[1] 0.04596307
```



Obrázek 4: Množina  $\mathcal{M}$  pro  $c \geq a$

```
> pstA(19,37)
[1] 0.002617516
```

Nejmenší z hodnot 13, 16 a 19, pro které je příslušná pravděpodobnost menší nebo rovna číslu  $\alpha = 0,05$ , je 16. Dostali jsme úplně stejný výsledek jako při použití asymptotického vzorce. Místo příkazu `pst1/pst0` by se mělo psát `(4*pst1)/(4*pst0)`, protože kterákoli ze čtyř tříd může získat maximální počet hlasů. Výsledek by se však nezměnil.

Dále si položíme otázku, jak to dopadne, když se budeme rozhodovat podle největší četnosti, aniž bychom trvali na požadavku, že četnosti ostatních tříd musí být stejné. Pravděpodobnost, že největší četnost bude větší nebo rovna číslu  $x$ , zatímco četnosti všech ostatních tříd budou menší než  $x$ , vypočteme pomocí funkce

```
pstB <- function(x,n,p=rep(0.25,4)){
#     pst, ze max_j N_j >= x v multinomickem rozdeleni pro k=4
#     a soucasne ostatni cetnosti jsou mensi
#     p jsou psti multinomickeho rozdeleni
#     pro vypocet podmineny psti staci umistit maximalni cetnost
#     do posledni tridy vzhledem k symetrii
pst <- 0
  for (i1 in 0:(x-1)) # cykly postupne přes jednotlivé složky
    for (i2 in 0:(x-1))
      for (i3 in 0:(x-1))
        if (n-i1-i2-i3 >= x & i1+i2+i3 <= n)
          pst <- pst + dmultinom(x=c(i1,i2,i3,n-i1-i2-i3), prob=p)
4*pst
}
```

a postupně dostaneme

```
> pstB(15,37)
```

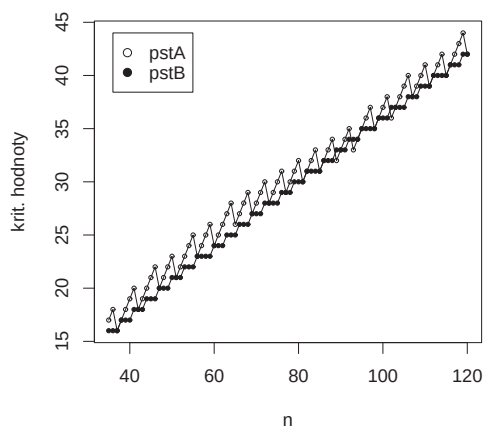
```
[1] 0.1086738
> pstB(16,37)
[1] 0.04664514
```

Je překvapivé, že i zde dostáváme stejnou kritickou hodnotu 16 jako v předchozí variantě.

Pro  $n = 120$  nám z asymptotického vzorce vyšlo, že se výsledek signifikantní na hladině 0,05 dostane, když je četnost nejvíce obsazené třídy alespoň 43. Pokud budeme trvat na tom, že četnosti zbývajících tříd mají být stejné, musí být četnost nejvíce obsazené třídy alespoň 45. Výpočet příslušných pravděpodobností pomocí funkce `pstA` pro hodnotu  $x = 45$  a několik sousedních hodnot lišících se o násobek tří dáva

```
> pstA(39,120)
[1] 0.1644003
> pstA(42,120)
[1] 0.04304467
> pstA(45,120)
[1] 0.00836636
> pstA(48,120)
[1] 0.001207493
```

Tedy pro  $x \geq 42$  dostáváme signifikantní výsledek, což znamená, že signifikance nastává v případě, kdy nejčetnější třída má alespoň 35 %.



Obrázek 5: Kritické hodnoty v případě pravděpodobností `pstA` a `pstB`

V případě, kdy se nepožaduje, aby četnosti méně obsazených tříd byly stejně velké, pomocí funkce `pstB` dostaneme hodnoty

```
> pstB(40,120)
[1] 0.1000768
> pstB(41,120)
[1] 0.06199734
> pstB(42,120)
```

```

[1] 0.03711916
> pstB(43,120)
[1] 0.02149687
> pstB(44,120)
[1] 0.01204636
> pstB(45,120)
[1] 0.006532843

```

Zde signifikantní výsledek na hladině 0,05 vyjde rovněž při  $x \geq 42$ .

Připomeňme, že v případě  $n = 37$  vyšla kritická hodnota pro nejvíce obsazenou třídu rovna 16, a to jak za podmínky na rovnost četností méně obsazených tříd, tak i bez této podmínky. Podobně v případě  $n = 120$  vyšla v obou případech stejná kritická hodnota 42. Pro porovnání byly tedy vypočteny oba typy kritických hodnot pro počet  $n$  od 35 do 120. Výsledky jsou znázorněny na obr. 5. Lze konstatovat, že rozdíly mezi oběma typy kritických hodnot jsou malé a v některých případech (jak jsme ostatně viděli) vycházejí oba typy kritických hodnot stejné.

## 5 Proč by k milionu nepomohl ani výpočet.

Vraťme se k našemu soutěžícímu. Ten měl na základě dosavadního průběhu soutěže již 320 000,- Kč. Použil náповědu publika, přiklonil se k odpovědi C, ale nebylo to správně. Správná odpověď byla A. Protože si však odnášel domů 320 000,- Kč, asi odcházel spokojen. My jen můžeme konstatovat, že se lidé zřejmě nerozhodují úplně náhodně ani v případě, kdy správnou odpověď neznají. Patrně se přiklánějí k té variantě, kterou pokládají za pravděpodobnější. A to nemusí být nutně ta správná.

Je možné, že jste slovo jablečňák také neznali. Podíváte-li se však do anglického slovníku, zjistíte, že dapple-grey je šedě grošovaný kůň, grošák, jablečňák. A grošáka přece známe z pohádek, které jsme četli, když jsme byli malí.

## Literatura

Anděl J. (2003): Statistické metody (3. přepracované vydání). Matfyzpress, Praha.

## Poděkování

Práce na tomto článku byla podpořena výzkumným záměrem MSM 113200008 Matematické metody ve stochastice.

# Ztráta informace, způsobená restrikcí škály

*Zdeněk Půlpán, Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové*

Restrikce škál je běžnou součástí zpracování prvotních dat. Souvisí s často požadovanou transformací číselných dat do standardní podoby, pro kterou je navržena jednotná interpretace. K získání informací o zkoumané populaci používáme rozdílných prostředků (např. testů) a proměnné měříme na rozdílných škálách. Údaje z prvotní metrické škály pak obvykle transformujeme na jednotnou oficiální škálu, např. se třemi, čtyřmi či pěti stupni (úrovněmi). Přitom zřejmě dochází k jisté ztrátě informace. Příspěvek se snaží odhadnout uvedenou změnu informace za určitých ideálních předpokladů pomocí Shannonovy míry informace. Ztrátou informace, vyvolanou restrikcí hodnotící škály, se zabývá také prof. Komenda ([1], [2]).

Uvažujme pro jednoduchost nejprve dotazník (test) s celkovým počtem  $n$  položek, které jsou alternativně skórovány: 0 resp. 1. Označme  $X$  celkový počet položek, hodnocených u jediného respondenta skórem 1 (např. počet správně vyřešených). Pro jednoduchost předpokládejme, že respondent reaguje na každou položku nezávisle na ostatních, a se stejnou pravděpodobností  $p$ , která je mírou jeho schopnosti správné odpovědi. Veličinu  $X$  pak můžeme chápat jako náhodnou s binomickým rozložením s parametry  $(n, p)$ . Škálu, na níž se zobrazují hodnoty náhodné veličiny  $X$ , nazveme základní a označíme  $Z_n$ :

$$Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}. \quad (1)$$

Bodovým odhadem pravděpodobnosti  $p$  je pak hodnota  $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$ , kde  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$ ,  $N$  je počet všech respondentů téže úrovně  $p$ ,  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , jejich celkové skóry. Měření na základní škále  $Z_n$  nám v případě respondentů úrovně  $p$  přináší informaci  $I_{Z_n}(p)$ , která je určena entropií  $H_{Z_n}$  podle (2a), (2b)

$$I_{Z_n}(p) = \ln(n+1) - H_{Z_n}(p) \quad (2a)$$

$$H_{Z_n}(p) = - \sum_{x=0}^n P(X=x) \cdot \ln P(X=x) \quad (2b)$$

Provedme nyní restrikci  $R_k$  základní škály  $Z_n$ . Ta je určena rozkladem množiny  $Z_n$  na  $k$  disjunktních podmnožin  $S_i \subset Z_n$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , tak, že  $S_i$  tvoří intervaly a platí

$$k < n, \quad R_k = \{S_i\}_{i=1}^k, \quad S_i \cap S_j = \emptyset, \quad \cup_{i=1}^k S_i = Z_n, \quad i \neq j \quad (3)$$

Z pravděpodobností  $P(X \in S_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , určíme entropii pro restrikci  $R_k$  ve tvaru

$$H_{R_k}(p) = - \sum_{i=1}^k P(X \in S_i) \cdot \ln P(X \in S_i) \quad (4a)$$

a informaci

$$I_{R_k}(p) = \ln k - H_{R_k}(p) \quad (4b)$$

Změnu informace, vyplývající z restrikce  $R_k$ , odhadneme rozdílem (5a). Rozdíl neurčitostí (5b) pak reprezentuje ztrátu informace restrikcí škály v populaci úrovně  $p$ :

$$\Delta I_{Z_n-R_k}(p) = I_{Z_n}(p) - I_{R_k}(p) \quad (5a)$$

$$\Delta H_{Z_n-R_k}(p) = H_{Z_n}(p) - H_{R_k}(p) \quad (5b)$$

*Příklad 1.* Mějme test o  $n = 20$  položkách, skórováný dichotomicky, jak uvedeno výše. Restringuje škálu  $Z_{20}$  na čtyřbodovou  $R_4 = \{S_i\}_{i=1}^4$ , kde  $S_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $S_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $S_3 = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ ,  $S_4 = \{16, 17, 18, 19, 20\}$ .

Pro úrovně  $p = 0, 1; 0, 2; \dots, 0, 9$  stanovme odpovídající hodnoty entropií  $H_{Z_{20}}$ ,  $H_{R_4}$  a informací  $I_{Z_{20}}$ ,  $I_{R_4}$ . Protože při výpočtech používáme logaritmus o přirozeném základu, jsou výsledky uvedené v tabulce Tab. 1 v jednotkách *nit* (natural digit) s výjimkou posledního sloupce, kde jsou pro srovnání uvedeny hodnoty veličiny  $\Delta I_{Z_{20}-R_4}$  v jednotkách *bit* (binary digit) spočtené pomocí logaritmů o základu 2. Změna informace  $\Delta I_{Z_{20}-R_4}$  je závislá na úrovni  $p$ . ■

| $p$ | $H_{Z_{20}}$ | $I_{Z_{20}}$ | $H_{R_4}$ | $I_{R_4}$ | $\Delta I_{Z_{20}-R_4}$ | $\Delta I_{Z_{20}-R_4}$ [bit] |
|-----|--------------|--------------|-----------|-----------|-------------------------|-------------------------------|
| 0,1 | 1,667        | 1,378        | 0,062     | 1,324     | 0,054                   | 0,078                         |
| 0,2 | 1,988        | 1,057        | 0,498     | 0,888     | 0,169                   | 0,244                         |
| 0,3 | 2,133        | 0,912        | 0,757     | 0,629     | 0,283                   | 0,408                         |
| 0,4 | 2,202        | 0,842        | 0,743     | 0,643     | 0,199                   | 0,287                         |
| 0,5 | 2,223        | 0,822        | 0,798     | 0,588     | 0,234                   | 0,338                         |
| 0,6 | 2,202        | 0,843        | 0,753     | 0,633     | 0,210                   | 0,303                         |
| 0,7 | 2,133        | 0,912        | 0,728     | 0,658     | 0,254                   | 0,366                         |
| 0,8 | 1,988        | 1,057        | 0,675     | 0,711     | 0,346                   | 0,499                         |
| 0,9 | 1,667        | 1,378        | 0,178     | 1,208     | 0,170                   | 0,245                         |

Tab. 1. Odhady ztrát informace restrikcí škály (Příklad 1)

V příkladu 1 jsme odhadli ztrátu informace, vzniklou restrikcí, kdy každá (resp. téměř každá) třída rozkladu obsahovala stejný počet jednotek škály základní. Sledujeme nyní situaci, kdy restrikce  $R_k = \{T_i\}_{i=1}^k$  je tvořena rozkladem základní škály  $Z_n$  s vlastností

$$P(X \in T_i) \doteq \frac{1}{k}; \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad k < n. \quad (6)$$

*Příklad 2.* Mějme opět test o  $n = 20$  položkách. Z rozložení náhodné veličiny  $X$ , např. pro  $p = 0, 7$ , určíme opět čtyřstupňovou restrikci základní škály  $Z_{20}$ , ale s podmínkou

$$P(X \in T_i) \doteq \frac{1}{4}; \quad i = 1, 2, \dots, R.$$

Pak třídy rozkladu uvedené restrikce jsou  $T_1 = \{0, 1, \dots, 12\}$ ;  $T_2 = \{13, 14\}$ ;  $T_3 = \{15, 16\}$ ;  $T_4 = \{17, 18, 19, 20\}$ .

V tomto případě (pro  $p = 0, 7$ ) dostáváme nejmenší odhad ztráty informace v důsledku restrikce z rozdílu dvou entropií  $H_{Z_{20}}(0, 7)$  a  $H_{R_k}^{max} = \ln 4$ :

$$\Delta H_{Z_{20}-R_4}^{min}(0, 7) = H_{Z_{20}}(0, 7) - \ln 4 = 0, 747.$$

Současně však vidíme, že

$$\Delta I_{Z_{20}-R_4}(0, 7) = I_{Z_{20}}(0, 7) - I_{R_4}(0, 7) \doteq I_{Z_{20}}(0, 7) - 0 = I_{Z_{20}}(0, 7),$$

a dokonce tedy pak

$$\Delta I_{Z_{20}-R_4}(p) = I_{Z_{20}}(p) \text{ pro každé } p \in (0; 1). \quad \blacksquare$$

Uvažujme nyní libovolné empirické rozložení náhodné veličiny  $X$ , odhadnuté například realizací  $n$ -položkového testu. Pak definujeme empirickou entropii  $H_{Z_n}$  a empirickou informaci  $I_{Z_n}$  ve tvaru

$$H_{Z_n} = - \sum_{i=1}^n \hat{p}_i \cdot \ln \hat{p}_i , \quad (7a)$$

$$I_{Z_n} = \ln(n+1) - H_{Z_n} , \quad (7b)$$

kde  $\hat{p}_i = \frac{N_i}{N}$ ,  $N_i$  je počet respondentů s výsledkem  $X = i$  v souboru  $N$  všech respondentů, kteří se podrobili testu. Empirickou informaci  $I_{Z_n}$  můžeme interpretovat jako informaci o řešení daného testu referenční populací, které bylo registrováno na základní škále  $Z_n$ . Restrikcí základní škály  $Z_n$  na škálu  $R_k = \{U_i\}_{i=1}^k$  se entropie  $H_{Z_n}$  transformuje na

$$H_{R_k} = - \sum_{i=1}^k P(X \in U_i) \cdot \ln P(X \in U_i) , \quad (8)$$

kde

$$P(X \in U_i) = \frac{1}{N} \sum_{X \in U_i} N_i .$$

Změna informace v důsledku restrikce  $R_k$  pak je

$$\Delta H_{Z_n-R_k} = H_{Z_n} - H_{R_k} . \quad (9)$$

Podobně, jako v příkladu 2, může být uvedena ztráta informace nejmenší, když restrin-govaná škála bude splňovat podmínku

$$P(X \in U_i) \doteq \frac{1}{k}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Pak je  $H_{R_k} \doteq \ln k$ .

Jako výsledek měření se často předpokládá normálně rozložená náhodná veličina  $X$ . Dokonce řada psychologických testů je konstruována tak, aby v jistém druhu populace byl testový výsledek aproximovatelný normálním rozložením s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad \sigma > 0; \quad \mu \text{ reálné.} \quad (10)$$

Z obecné definice entropie (11) pro spojitou náhodnou veličinu  $X$  s hodnotou  $f(x)$  a rozlišením škály  $\Delta x > 0$ :

$$H(X) = E[-\ln f(X)] - \ln \Delta x \quad (11)$$

určíme snadno pro náhodnou veličinu (10) vyjádření  $H(X)$  ve tvaru (12)

$$H(X) = \ln(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma) + 0,5 - \ln \Delta x \doteq 1,419 + 0,5 \cdot \ln \sigma^2 - \ln \Delta x. \quad (12)$$

V tomto výrazu pro entropii je  $\Delta x$  konstantou užitě škály měření a parametr  $\sigma^2$  se dá odhadnout pomocí výběrového rozptylu  $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$  z výsledků aplikace v hodnotách základní škály. Je-li aproximovanou náhodnou veličinou např. celkový počet položek se skórem 1, je možné položit  $\Delta x = 1$  (a pak  $\ln \Delta x = 0$ ). Restrikcí  $R$  škály



$Z_n$  pro velká  $n$  např. na 4-bodovou škálu  $R_4 = \{V_i\}_{i=1}^4$ , kde  $V_1 = (-\infty; u_{0,25})$ ;  $V_2 = (u_{0,25}; u_{0,50})$ ;  $V_3 = (u_{0,50}; u_{0,75})$ ;  $V_4 = (u_{0,75}; \infty)$ ;  $u_\alpha$  je  $\alpha$ -kvantil rozložení (10), dostáváme pro jednotlivé pravděpodobnosti

$$P(V_i) = \frac{1}{4}; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Proto také ztráta informace volbou této restringované škály je rovna

$$\begin{aligned} \Delta H_{Z_n-R_4} &= (\ln(\sqrt{2\pi}) + 0,5 \cdot \ln \sigma^2 + 0,5) - \ln 4 \doteq 0,33 + 0,5 \cdot \ln \sigma^2 \approx \\ &\approx 0,033 + 0,5 \cdot \ln s^2, \end{aligned} \quad (13)$$

a je pro kteroukoliv 4-bodovou restringovanou škálu nejmenší.

Poznámka: Informace, určená z (2a), resp. (4b), (5a), (7b), je odhadnuta z rozdílu maximální a aktuální neurčitosti výsledků řešení testu v jisté populaci (úrovně  $p$ ). Může být interpretována jako míra informace o uvažované populaci (úrovně  $p$ ), obsažené v datech příslušné škály. Informace  $\Delta H_{Z_n-R_k}(p)$  z (5b), resp.  $\Delta H_{Z_n-R_k}$  z (9), je mírou změny neurčitosti restrikcí škály a může být interpretována jako míra informačního deficitu, způsobeného restrikcí. ■

V praxi se doporučují různé restrikce základní škály; například v práci [6] se udává pětistupňový klasifikační standard pro fyzikální vědomosti podle tabulky Tab. 2. Uvažuje se restrikce hrubého testového skóru  $X$  v dostatečně rozsáhlém testu na pětistupňovou restringovanou škálu  $R_5$ . Meze hrubého testového skóru  $X$  pro příslušnou restringující hodnotu na škále  $R$  jsou v tabulce označeny kvantily. Pro uvedenou škálu je  $H_{R_5} = 1,574$ .

|        |                 |                        |                        |                        |                         |
|--------|-----------------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|
| $p \%$ | 15              | 20                     | 30                     | 20                     | 15                      |
| $R_5$  | 5               | 4                      | 3                      | 2                      | 1                       |
| $X$    | $< 0; x_{0,15}$ | $< x_{0,15}; x_{0,35}$ | $< x_{0,35}; x_{0,65}$ | $< x_{0,65}; x_{0,85}$ | $< x_{0,85}; x_{max} >$ |

Tab. 2. Vzorový standard restrikce hrubého testového skóru  $X$  na pětistupňovou klasifikační škálu  $R_5$ .

## Závěr

Statistickými prostředky je možné odhadnout ztrátu informace, vzniklou restrikcí základní škály. K odhadu byla užita Shannonova míra. Na jejím základě byly popsány vlastnosti některých specifických typů restringovaných škál. Při výpočtech v tomto článku používáme logaritmus o přirozeném základu, a proto je míra informace vyjádřena v jednotkách *nit* (natural digit).

## Literatura

- [1] Komenda, S.: *Fisher information in the logistic model*. Acta Univ. Olomouc, Fac. med. 117, 329 - 336, 1987
- [2] Komenda, S.: *Měření a metaměření znalostí*. UPOL, Olomouc 2003
- [3] Komenda, S., Zapletalová, J.: *Analýza didaktického testu a její počítačová podpora*. UPOL, Olomouc 1996
- [4] Půlpán, Z.: *K problematice hledání podstatného v humanitních vědách*. Academia, Praha 2001
- [5] Hnilíčková, J., Josífko, M., Tuček, A.: *Didaktické testy a jejich statistické zpracování*. SPN, Praha 1972
- [6] Fenclová, J.: *Fyzikální vědomosti našich studentů*. Academia, Praha 1980

# Analýza a modelování tvrdosti tepelně nezpracovaných šroubů M10

*Doubrauský, K.<sup>1</sup>, Maroš, B.<sup>1</sup>, Janíček, L.<sup>2</sup>*

## 1 Úvod

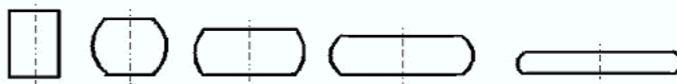
V příspěvku jsou uvedeny výsledky z výzkumu chování vysoce pevných šroubů M10 vyrobených ze speciální mikro - legované oceli 8Mn2Si. Tuto ocel vyrobil díky moderní technologii válcování VÚHŽ Dobrá. Šrouby M10 byly vyrobeny tvářením za studena bez následného tepelného zpracování. Tento fakt je významný zejména z ekonomického hlediska, protože tímto způsobem lze vyrobit uvedené součásti podstatně levněji než ve stávající technologii, kdy běžně používané materiály je potřeba nejdříve zušlechtit, aby získaly požadovanou pevnost. Zušlechťování je finančně nákladné a je provázeno vznikem celé řady výrobních vad, které je nutno dále odstraňovat. To způsobuje další zvyšování výrobních nákladů. Nabízí se tedy technologie výroby spojovacích součástí plně využívající zpevnění materiálu, kdy výrobek nabývá požadovanou úroveň pevnostně plastických charakteristik bez použití finálního zušlechťování. Je to zákonitě objemové tvářením materiálu za studena.

V současné době střední a západní Evropa vzdoruje výrobcům spojovacího materiálu a čepových součástí tvářených za studena z jihovýchodní Asie. V našich podmínkách mohou firmy zaměřené na tuto technologii konkurovat asijským výrobcům zejména výrobou vysoce pevných šroubů tvářených bez finálního zušlechťování. Příkladem takovýchto šroubů jsou výše zmíněné šrouby M10, vyrobené z oceli 8Mn2Si. Využití těchto šroubů je zejména v automobilovém, leteckém průmyslu a všude tam, kde jsou kladeny vysoké nároky na pevnost součástí, jejich nízkou cenu a menší rozměry.

Jelikož se jedná o nový typ šroubů, bylo potřebné zjistit jejich vlastnosti (nerovnoměrnost deformace) a navrhnout metodiku testování. K tomu účelu byla na podélných osových řezech šroubů změřena tvrdost a získaná data byla dále statisticky zpracována.

## 2 Experimentální práce

Pro čtyřoperační výrobu šroubů M10 byly použity dva průměry polotovaru z oceli 8Mn2Si:  $\varnothing 11,68$  mm a  $\varnothing 13,69$  mm. Byla provedena postupná pěchování vzorků (obr.1), jejíž výsledkem jsou křivky přetvárného odporu (závislost pevnosti na skutečné deformaci) (obr. 2). Dále byla na podélných osových řezech spěchovaných vzorků změřena tvrdost.



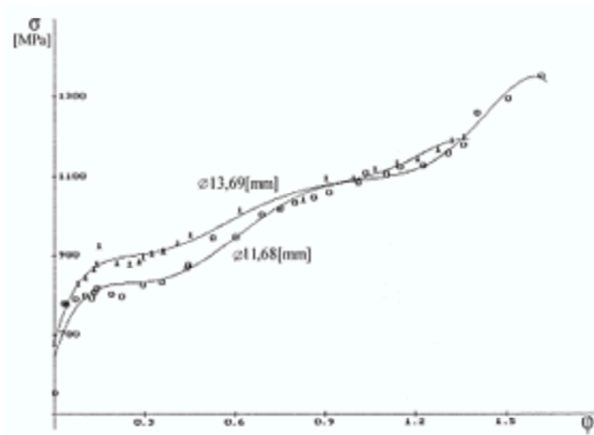
Obr. 1 Postupná pěchování vzorků.

Tato metoda pěchování a měření tvrdosti byla zvolena z důvodu stanovení závislosti střední hodnoty tvrdosti na skutečné deformaci (obr. 3). Podle tohoto vztahu je možno

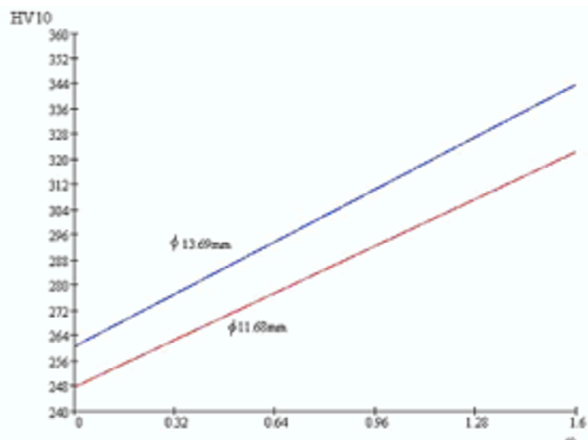
<sup>1</sup>VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky, Technická 2, 616 69 Brno

<sup>2</sup>VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav strojírenské technologie, Technická 2, Brno

ze změřených tvrdostí stanovit lokální hodnoty skutečné deformace a při znalosti křivky přetvárného odporu (obr. 2) lze zjistit zpevnění ve šroubech.

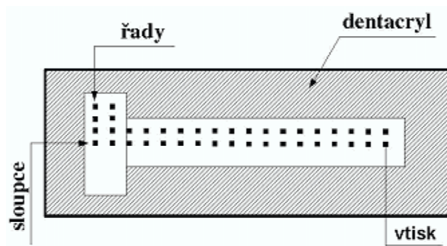


Obr. 2 Křivky přetvárného odporu.



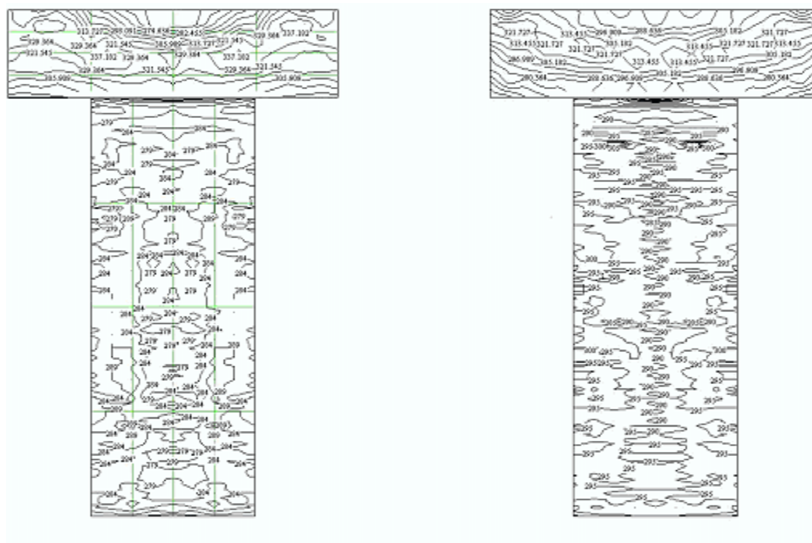
Obr. 3 Závislost střední hodnoty tvrdosti na skutečné deformaci.

Zkoumány byly dva typy šroubů M10, které se lišily délkou dřívku (81 mm resp. 81,25 mm) a průměrem výchozího polotovaru (13,69 mm resp. 11,68 mm), ze kterého byly vyrobeny. Od každého typu byly k dispozici tři vzorky. Nerovnoměrnost deformace byla zjišťována u jednotlivých typů šroubů za použití měření tvrdosti. Zkouška tvrdosti probíhala na tvrdoměru ZWICK 3212 vybaveném CCD kamerou. Měření bylo provedeno na podélných osovéch řezech šroubů (obr. 4) tak, že vtisky byly od sebe vzdáleny v osách  $x$  a  $y$  0,8 mm. Takto podrobné měření zahrnovalo kolem 400 vtisků.

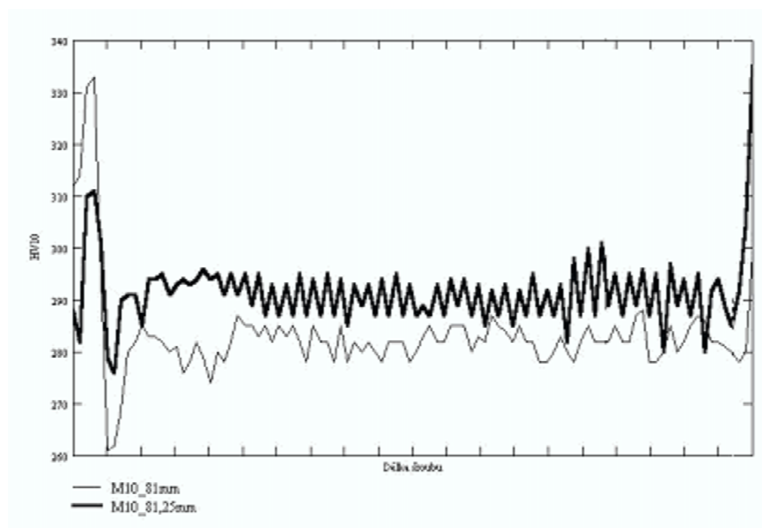


Obr. 4 Rozložení vtisků na šroubu.

Výsledkem měření byl ucelený soubor dat (matice), který sloužil jako podklad pro statistickou analýzu. Umožnil též provést předběžný náhled na rozložení tvrdosti ve šroubech (obr. 7):



Obr. 5 Izodury tvrdosti pro šroub M10 81 mm a M10 81,25 mm.



Obr. 6 Tvrdost v osách šroubů.

### 3 Statistická analýza rozložení tvrdosti ve šroubech M10

V této kapitole jsou ukázány výsledky měření tvrdosti šroubů M10 z hlediska inženýrské statistiky. Nejdříve byl zvolen vhodný reprezentant, který charakterizuje rozložení tvrdosti na šroubu. Tímto reprezentantem byla zvolena osa šroubu. Z rozložení tvrdosti v osách šroubů (obr. 6) a z izodur tvrdosti (obr. 5) je patrná existence dvou odlišných částí: hlavy a dříku. Z těchto grafických náhledů je vidět, že v hlavě dochází k prudkému nárůstu a poté poklesu tvrdosti. Na dříku se tvrdost vyrovnává a ve střední části kolísá kolem průměrné hodnoty. K vyvrácení nebo potvrzení těchto domněnek nám poslouží aparát matematické statistiky.

#### 3.1 Použité statistické metody

##### *t-test*

Používáme tehdy, když chceme u dvou nezávislých výběrů z normálních rozdělení  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  ověřit hypotézu  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ . Testové kritérium má tvar

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Pokud je  $|T| \geq t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ , zamítáme hypotézu  $H_0$  na hladině významnosti  $\alpha$ .

##### *Analýza rozptylu jednoduchého třídění*

Touto metodou zjišťujeme, zda na pozorovanou náhodnou veličinu má vliv nějaký obecně kvalitativní faktor (třídící znak). Uvažujeme nezávislé výběry s normálním rozdělením  $N(\mu_1, \sigma^2), \dots, N(\mu_I, \sigma^2)$  a testujeme hypotézu  $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_I$  proti alternativní hypotéze  $H_1 : \mu_1 \neq \dots \neq \mu_I$ . Testovací procedura vychází z rozkladu tvaru  $S_t = S_A + S_e$ , kde

$$S_t = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{n}, \quad S_A = \sum_{i=1}^I \frac{x_{i.}^2}{n_i} - \frac{x_{..}^2}{n}, \quad S_e = S_t - S_A$$

Testové kritérium  $F_A = \frac{n-I}{I-1} \cdot \frac{S_A}{S_e}$ . Překročí-li  $F_A$  kritickou hodnotu  $F_{I-1, n-I}(\alpha)$ , zamítáme hypotézu  $H_0$  na hladině významnosti  $\alpha$ .

### *Bartlettův test*

Slouží k ověření hypotézy, že všech  $I$  výběrů pochází ze základních souborů, které mají normální rozdělení se stejným rozptylem. Testujeme hypotézu  $H_0 : \sigma_1^2 = \dots = \sigma_I^2$ . Testové kritérium má tvar

$$b = \frac{1}{C} \left[ (n - I) \ln s^2 - \sum_{i=1}^I (n_i - 1) \ln s_i^2 \right], \text{ kde}$$
$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2, \quad s^2 = \frac{1}{n - I} \sum_{i=1}^I (n_i - 1) s_i^2,$$
$$C = 1 + \frac{1}{3(I - 1)} \left[ \sum_{i=1}^I \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n - I} \right].$$

Pokud je  $b \geq \chi_{I-1}^2(\alpha)$ , zamítáme hypotézu  $H_0$  na hladině významnosti  $\alpha$ .

### *Scheffého metoda*

Jestliže zamítáme hypotézu o rovnosti středních hodnot, hledáme které skupiny heterogenitu způsobují. Provede se  $\frac{I(I-1)}{2}$  testů  $H_0 : \mu_i = \mu_j$  na hladině významnosti  $\alpha$ . Testové kritérium má tvar

$$t = (\bar{x}_i - \bar{x}_j)^2 \cdot \frac{n_i n_j}{n_i + n_j} \cdot \frac{n - I}{I - 1} \cdot \frac{1}{S_e}.$$

Pokud je  $t \geq F_{I-1, n-I}(\alpha)$ , potom zamítáme hypotézu o rovnosti středních hodnot  $i$ -té a  $j$ -té skupiny.

### *Tukeyova metoda*

Používáme pro stejné účely jako Scheffého metodu, jen s tím rozdílem, že máme vyrovnaná třídění ( $n_i$  jsou stejná čísla).

Pokud platí  $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq sq_{I, n-I}(\alpha)$ , kde  $s = \frac{S_e}{n-I}$  a  $q_{I, n-I}(\alpha)$  je kritická hodnota studentizovaného rozpětí, pak se zamítá hypotéza o rovnosti středních hodnot  $i$ -té a  $j$ -té skupiny.

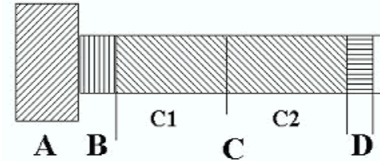
## **3.2 Zpracování hlav a dříků šroubů**

Všechny naměřené hodnoty tvrdosti na šroubech byly seřazeny do dvou vektorů. Porovnání těchto vektorů pomocí analýzy rozptylu nebylo možné, protože za pomoci Bartlettova testu byla zamítnuta nulová hypotéza o rovnosti rozptylů  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . Průměrné hodnoty ze všech naměřených hodnot tvrdosti na celém šroubu pomocí t-testu nebyly porovnány, protože se u šroubu vyskytují velmi odlišné oblasti. Porovnání takovýchto hodnot by mohlo být zavádějící. Z tohoto důvodu byl šroub rozdělen na dvě části, hlavu a dřík (obr.7).

Hodnoty tvrdosti naměřené na hlavě šroubu M10 délky 81,25 mm byly vloženy do matice a ta byla zpracována pomocí analýzy rozptylu jednoduchého třídění. Nejprve s třídícím faktorem řad a poté s třídícím faktorem sloupců. Analýza rozptylu mohla být použita, protože nebyla za pomoci Bartlettova testu zamítnuta nulová hypotéza o rovnosti rozptylů. Analýza dala tyto výsledky: mezi sloupci neexistuje statisticky významný rozdíl, naopak řady se od sebe významně liší. Pomocí Tukeyovy metody byly získány i konkrétní řady, které se významně liší. Významnými řadami na hlavě šroubu jsou řada 1 a řada 2.

Řada 1 se statisticky významně liší od všech ostatních řad kromě řady 2. Řada 2 se liší od všech ostatních kromě řady 1 a 7. Je tedy vidět, že v hlavě šroubu dochází ke zpevnění v její střední části (řady 3, 4, 5 a 6).

U hlavy šroubu M10 délky 81 mm byl zvolen obdobný postup vyhodnocení hodnot tvrdosti jako v předcházejícím případě. V případě třídícího faktoru sloupců byly získány stejné výsledky, tzn. třídící faktor sloupců nemá vliv. V případě třídícího faktoru řad byla pomocí Bartlettova testu zamítnuta hypotéza o rovnosti rozptylů. Nebylo tedy možné použít analýzu rozptylu a bylo nutné zvolit jiné řešení. Tímto řešením bylo porovnávání průměrů dvojic zvolených řad pomocí t-testu. Nebyly porovnávány tedy všechny dvojice, ale pouze dvojice cíleně vybrané tak, aby bylo zjištěno, zda u hlavy šroubu dochází ke zpevnění (vybrány dvojice 1–3, 1–4, 1–5, 5–7, 4–7), a od kterých řad se toto zpevnění projevuje (porovnávány řady 1–2 a 6–7). Pomocí t-testu byly získány na hlavě šroubu tyto výsledky. Opět dochází ke zpevnění v její střední části tvořené řadami 2, 3, 4, 5 vůči řadě 1 a části tvořené řadami 4, 5 vůči řadě 7.



Obr. 7 Rozdělení šroubu na oblasti.

Při vyhodnocování dříků jednotlivých typů šroubů bylo nutné rozdělit dřík na pět částí, protože se při zpracování dříku jako celku projevoval problém nestejnosti rozptylů porovnávaných dat.

Nejdříve byl vyhodnocován dřík šroubu M10 délky 81,25 mm. Pomocí t-testu byly na celém dříku porovnávány průměrné hodnoty ve sloupcích 1, 3 a 5 s výsledky  $1 < 3$ ,  $1 < 5$ ,  $3 < 5$ . Dále byly s využitím t-testu porovnávány průměrné hodnoty v oblastech  $B, C, C_1, C_2, D$  s výsledkem  $B < D, C > D, B > D, C_1 > C_2$ . Poté bylo přistoupeno k analýze hodnot tvrdosti v jednotlivých oblastech dříku. V těchto oblastech nebyla za pomoci Bartlettova testu zamítnuta hypotéza o rovnosti rozptylů a mohla být použita analýza rozptylu (s třídícím faktorem řad a sloupců). V oblasti  $B$  neexistuje mezi sloupci statisticky významný rozdíl. Řady se od sebe významně liší, odlišnou je řada 1 od všech ostatních a řady 2–5. V oblasti  $C$  mezi řadami neexistuje statisticky významný rozdíl. Liší se od sebe sloupce 1–3, 1–5, 3–5. V poslední části  $D$  mezi řadami neexistuje statisticky významný rozdíl. Mezi sloupci se liší sloupec 1 a 5 od všech ostatních. Celý dřík na šroubu M10 délky 81 mm byl opět vyhodnocován pomocí t-testu. Porovnávány byly průměrné hodnoty ve sloupcích 1, 3, 5. Toto porovnávání dalo následující výsledek. Stejně jako v předešlém případě byly také pomocí t-testu porovnávány průměrné hodnoty jednotlivých oblastí dříku s výsledkem:  $B < C, C > D, B = D, C_1 > C_2$ . Dále byly s využitím analýzy rozptylu vyhodnocovány jednotlivé oblasti dříku. V oblasti  $B$  se od sebe statisticky významně liší řady 1–3, 1–4, 1–5. Mezi sloupci statisticky významný rozdíl neexistuje. V oblasti  $C$  mezi řadami neexistuje statisticky významný rozdíl. Liší se od sebe sloupce 1–3, 1–5, 3–5. V poslední části  $D$  mezi sloupci neexistuje statisticky významný rozdíl. Mezi řadami se liší řady 1–3, 1–4, 1–5 a řada 5 od všech ostatních.

## 4 Matematický model rozložení tvrdosti

Pojem model se vyskytuje v odborné literatuře stále častěji. Teorie modelů a modelování nabyla v poslední době značného významu v souvislosti s rozvojem výpočetní techniky. Různé názory na podstatu modelů netvoří zdaleka ucelenou teorii s jednotnou terminologií. Konstrukce modelu a její pravidla jsou vázána na řešení určitých konkrétních úloh. Při



sledování jevů a procesů reálného světa si uvědomujeme, že je v naprosté většině nejsme schopni zcela vysvětlit. Velmi obtížně postihujeme zákonitosti jejich vzniku a ještě hůře pronikáme do jejich vazeb a souvislostí. Modelování je tvůrčí lidská činnost spočívající ve zjednodušení a idealizaci dějů reálného světa. Model tedy můžeme chápat jako určitou formu zobrazení skutečnosti. Rozdíl je pouze v tom, jaká je modelovaná skutečnost, jaké jsou modelovací prostředky a k jakému účelu model slouží.

V našem případě hledáme matematický model rozložení tvrdosti na tepelně nezpracovaných šroubech (hledáme závislost mezi hodnotou tvrdosti a polohou na šroubu). Máme jednu závisle proměnnou  $t$ , kterou je změřená hodnota tvrdosti. A dvě vysvětlující proměnné  $x$  a  $y$ , které udávají polohu na podélném osovém řezu šroubu. K nalezení takového modelu použijeme aparát regresní analýzy.

#### 4. 1 Regresní model více proměnných

Pokud nemáme v případě regrese jednu nezávisle proměnnou, ale jako v našem případě dvě, nedá se popis regresní funkce najít tak snadno a rychle. Největší nesnází je stanovení optimálního výběru vysvětlujících proměnných a stanovení maxima mocnin u těchto proměnných.

V našem případě máme jednu závisle proměnnou  $t$  (tvrdost), jejíž naměřené hodnoty se dají vysvětlit pomocí dvou proměnných  $x, y$  (poloha na podélném osovém řezu šroubu). Jedná se o polynomiální funkci zapsanou ve tvaru

$$t = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s b_{ij} x^i y^j.$$

V tomto polynomu můžeme považovat všechny výrazy  $x^i y^j$  za nezávisle proměnné, takže při odhadu neznámých koeficientů  $b_{ij}$  máme regresní úlohu obsahující  $(r+1)(s+1)$  nezávisle proměnných. Protože jde jen s obtížemi a s vysokými časovými nároky vypočítat regresní funkce pro všechny možnosti, dá se tento problém zjednodušit použitím metody Monte Carlo.

Nejprve si zvolíme čísla  $r, s, k$ , kde  $k$  značí počet členů polynomu. Pak náhodným výběrem vybereme  $k$  výrazů  $x^i y^j$ ,  $i = 0, 1, \dots, r$ ,  $j = 0, 1, \dots, s$  tak, aby se v jednom výběru nevyskytovaly stejné výrazy. Každý výraz můžeme zapsat jako dvojici jeho mocnin  $(i, j)$ . Pro každou uspořádanou dvojici lze vypočítat odhad regresních koeficientů metodou nejmenších čtverců. Samozřejmě ne všechny náhodně vybrané proměnné mají stejný vliv na závisle proměnnou  $t$ . K určení důležitosti jednotlivých výrazů pro regresi slouží koeficient parciální korelace, který ukazuje na velikost korelace mezi závisle proměnnou  $t$  a nezávisle proměnnými  $x, y$ .

Odhad koeficientů  $b_{ij}$  se dá vypočítat metodou nejmenších čtverců z maticové rovnice

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{T},$$

kde  $\mathbf{b}$  je sloupcový vektor koeficientů  $b_{ij}$ ,  $\mathbf{X}$  je matice hodnot závisle proměnných typu  $n \times k$ ,  $\mathbf{T}$  je sloupcový vektor hodnot závisle proměnné o  $n$  prvcích. Reziduální součet čtverců se dá vypočítat dle vztahu

$$S(b) = \mathbf{T}^T \mathbf{T} - \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{T}$$

a nestranný odhad rozptylu je roven  $S^2 = \frac{S(b)}{n-k}$ .

Označíme-li  $\nu_p$  prvek matice  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  ležící v  $p$ -tém řádku a  $p$ -tém sloupci, pak partiální koeficient korelace  $r_p$  pro regresní koeficient  $b_p$ , se dá vypočíst ze vztahu

$$r_p = \frac{b_p}{\sqrt{b_p^2 + (n-k)S^2 \nu_p}}.$$

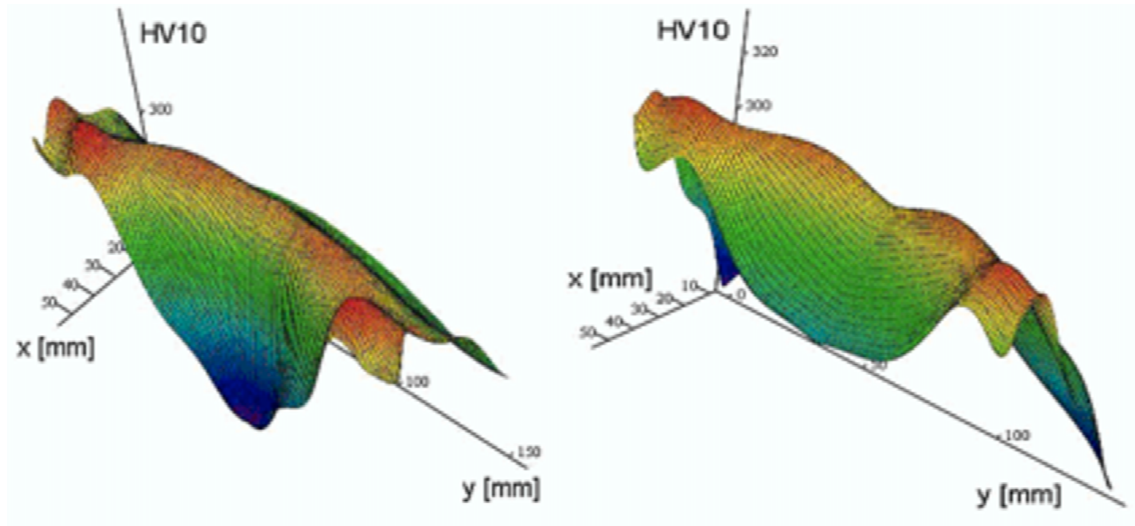
Pokud je hodnota  $r_p$  blízká 1, dá se hovořit o výrazném vlivu příslušného členu polynomu, naopak hodnoty blízké 0 znamenají, že vliv je minimální.

Jeden náhodný výběr  $k$  dvojic mocnin má pramalou vypovídací hodnotu o kvalitě regresní funkce. Je nutné provést celý postup, který je výše popsán, pro několik náhodně vygenerovaných vektorů, z nichž každý obsahuje  $k$  dvojic mocnin  $(i, j)$ . Pro každý vektor je pak nutné vypočíst reziduální součet čtverců, který nám vypovídá o kvalitě regrese.

Vzhledem k dvěma velice odlišným částem šroubu byl hledán model rozložení tvrdosti zvlášť na hlavě a dříku. Pro obě části bylo vygenerováno 15000 náhodných vektorů dvojic mocnin  $(i, j)$ . Následně byl podle výše zmíněného postupu hledán ten vektor dvojic mocnin, který má nejmenší reziduální součet čtverců a obsahuje všechny členy polynomu. Z řady pokusů se ukázalo, že čísla  $r, s, k$  je nejlépe volit takto:

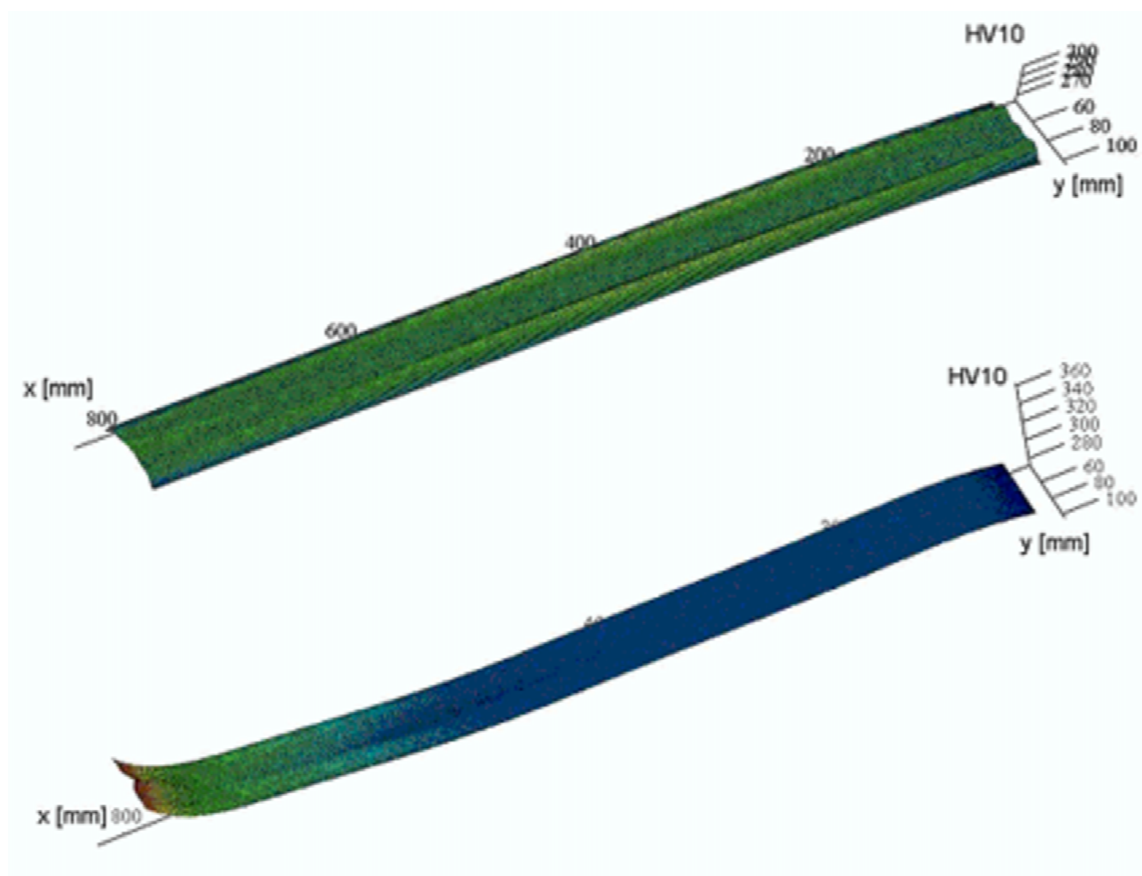
| Čísla | Hlava | Dřík |
|-------|-------|------|
| $r$   | 8     | 8    |
| $s$   | 8     | 8    |
| $k$   | 25    | 15   |

Nalezené modely rozložení tvrdosti jsou vidět na obr. 8 – obr. 10.

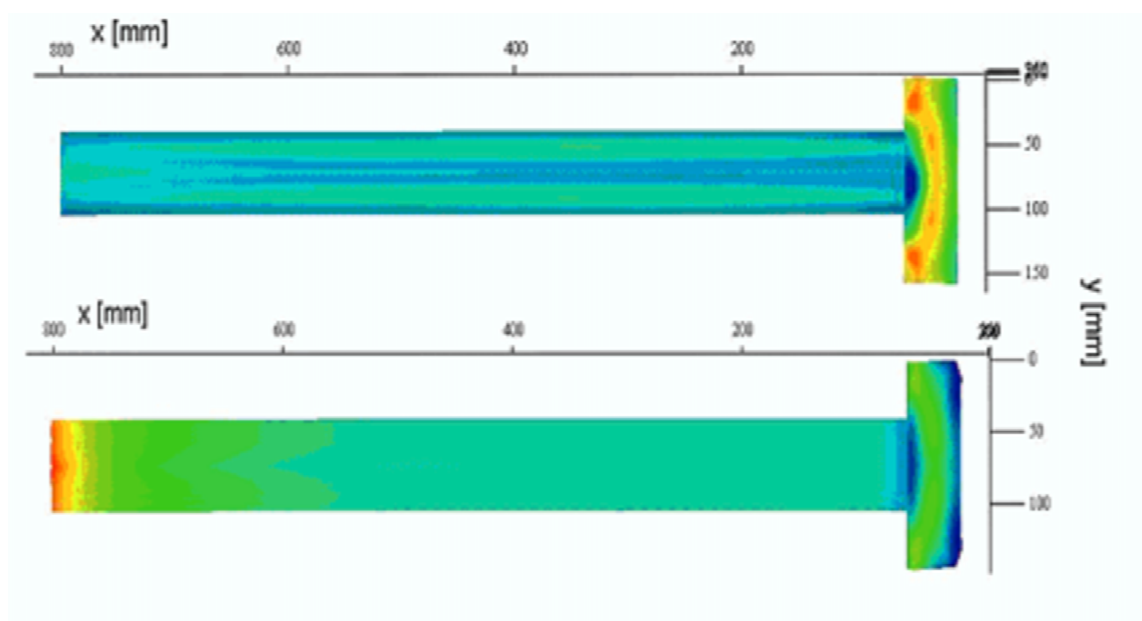


Obr. 8 Model rozložení tvrdosti na hlavě šroubu M10 délky 81 mm (vlevo) a 81,25 mm (vpravo).





Obr. 9 Model rozložení tvrdosti na dříku šroubu M10 délky 81 mm (nahore) a 81,25 mm (dole).



Obr. 10 Model rozložení tvrdosti na šroubu M10 délky 81 mm (nahore) a 81,25 mm (dole).

## 5 Závěr

Při zpracování naměřených hodnot tvrdosti na šroubech bylo zjištěno, že na hlavách šroubů dochází nejprve k prudkému nárůstu tvrdosti a poté k jejímu poklesu. Na dříku se projevují čtyři části. V oblasti *B* (viz obr. 7) dochází k nárůstu tvrdosti k průměrné hodnotě. V oblasti *C* dříku tvrdost kolísá kolem průměrné hodnoty a v oblasti *D* dochází k jejímu poklesu. Prudký nárůst na konci dříku šroubu M10 délky 81,25 mm je způsoben technologií výroby (vyhazovačem). Z těchto výsledků vyplývá, že v oblasti *C* může být síť vtisků řidší než v oblastech *A*, *B* a *D*. Tento fakt je důležitý zejména z hlediska časové a finanční úspory. Statistická analýza výše zmíněných šroubů je součástí širšího zkoumání tepelně nezpracovaných šroubů různých typorozměrů. Z podrobných experimentů vyplynulo, že tepelně nezpracované šrouby splňují požadavky na mechanické vlastnosti a charakteristiky, které požaduje norma ČSN EN 20898: Všeobecné požadavky na šrouby a matice. Izodury tvrdosti a jejich statistická analýza potvrdily vysokou citlivost metody měření tvrdosti na šroubech pro nekonvenční ocel 8Mn2Si. Výsledky experimentů a statistické analýzy byly cenným podkladem pro simulaci tváření šroubů, kde již slouží jako porovnávací prvek s výsledky numerické simulace MKP. Pro náš šroubářenský průmysl má tato činnost význam v udržení konkurenceschopnosti při dosažení špičkové jakosti spojovacích součástí.

Poděkování: Tento příspěvek vznikl jako součást řešení grantu CEZ J22/98: MSM 261100009 „*Netradiční metody studia komplexních a neurčitých systémů*“ a výzkumného záměru č. MSM 262100003 (CZ 300003/2201) „*Rozvoj progresivních vysoce přesných technologií*“

## Literatura

- [1] Janíček, L. aj. : *Vlastnosti pevnostních šroubů tvářených za studena bez konečného tepelného zpracování*. Sborník konference FORMING 2002, Luhačovice, 2002.
- [2] Janíček, L. aj. : *Chování oceli 8Mn2Si při výrobě pevnostních šroubů*. Sborník konference FORM 2002, Brno, 2002.
- [3] Popela, P.: *Application of Stochastic Programming in Foundary*. In: Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykianae Brunensis, Vol. **7**, pages 117–139, 1998.
- [4] Rusz, S.: *Modelování zápusťkového kování tvarově členitých součástí metodou konečných prvků (Simulating of Drop Forging of Shaping Component by FEM)*. Acta mechanica Slovaca, **3**, 1999, pp.211–214, ISSN 1335–2393
- [5] Petruška, J., Janíček, L.: *Computationally experimental evaluation of strain-hardness reference curves*. Proc. Conference ENGINEERING MECHANICS2000, Vol.**3**, s 71–76, Svratka, 2000.
- [6] Hořejš, S. aj.: *Závěrečná zpráva projektu EUREKA E! 1983 METALTEST*. VÚHŽ Dobrá, 2001.
- [7] Janíček, L., Maroš, B.: *Automatizace měření a zpracování dat u pýchovacích zkoušek*. Sborník konference FORM98 Brno, VUT FSI Brno, s 151–156.
- [8] Doubravský, K. at. al: *Behaviour of steel 8Mn2Si in high strength bolts production*. Proc. Conference ICIT 2003, Bled Slovenia, 9–11.4.2003.

## Přednáška o veřejných databázích ČSÚ

*Miroslav Hartmann*

V rámci svých odborných akcí uspořádala ve čtvrtek 18. března 2004 v Hradci Králové Česká statistická společnost ve spolupráci s Krajskou reprezentací Českého statistického úřadu v Hradci Králové přednášku ředitele odboru 2040 veřejných databází ČSÚ pana Ing. Eduarda Durníka. V ní seznámil přítomné s dosavadním vývojem a perspektivami veřejných databází ČSÚ. S rozšiřujícími se možnostmi internetových prezentací a stále snazšího přístupu k nim narůstá i zásadní význam právě tohoto lehce přístupného způsobu diseminace úřadem získávaných dat. Byli jsme seznámeni i s obdobnými projekty v zahraničí a upozorněni na další internetové zdroje podobného charakteru. Zároveň bylo podáno i srovnání kvality a obsahu těchto zdrojů. Přednášející nakonec ochotně poskytl účastníkům i souhrnný materiál a celou svou počítačovou prezentaci více než dvouhodinové a velmi zajímavé přednášky. Organizátory potěšila pěkná účast téměř třiceti zájemců a odborníků, škoda jen, že z řad členů naší společnosti jich byla mizivá menšina. A ještě jedno upozornění na závěr: Informace publikované ČSÚ na internetu najdete na oficiálních stránkách úřadu <http://www.czso.cz>.

## Pracovní konference IMIA „Statistické metodologie v bioinformatice a klinických studiích“

*Marek Malý*

Ve dnech 12.–16. dubna 2004 proběhla v Praze v Lékařském domě, v hotelu Novotel, v prostorách Univerzity Karlovy a Všeobecné fakultní nemocnice mezinárodní konference *International Joint Meeting EuroMISE 2004*, kterou uspořádalo Evropské centrum pro medicínskou informatiku, statistiku a epidemiologii Univerzity Karlovy a Akademie věd ČR (EuroMISE centrum) pod záštitou předsedkyně Akademie věd ČR doc. Heleny Illnerové a rektora Univerzity Karlovy prof. Ivana Wilhelma. Její součástí byla pracovní konference Mezinárodní asociace pro medicínskou informatiku IMIA na téma *Statistické metodologie v bioinformatice a klinických studiích*, tři paralelní symposia a jeden satelitní pracovní seminář.

Jedním ze spoluorganizátorů pracovní konference IMIA byla spolu s Českou lékařskou společností J.E. Purkyně, Českou společností biomedicínského inženýrství a lékařské informatiky a Přírodovědeckou fakultou UK i Česká statistická společnost. Na konferenci zaznělo více než 30 jak teoreticky, tak prakticky orientovaných příspěvků našich i zahraničních odborníků. Zajímavé přednášky přednesli zvaní řečníci prof. Casimir A. Kulikowski (USA), prof. Norbert Victor (Německo), prof. Kwok-Chan Lun (Singapur). Pracovní konference IMIA byla především zaměřena na statistické metody používané v oblasti biomedicínských aplikací orientovaných na zpracování informace v klinických a genetických studiích. Jednotlivé sekce byly věnovány bioinformatice, statistickým metodám v klinickém výzkumu, epidemiologickým studiím, problematice data mining a podpory rozhodování, propojení nemocničních informačních systémů a klinických studií, výpočetní statistice a analýze genetických dat na úrovni DNA. Mezi účastníky konference bylo i několik členů České statistické společnosti, vesměs ovšem těch, kteří mají pracovní vazby na pořádající EuroMISE centrum.

Mnoho zajímavých příspěvků zaznělo i na souběžně konaných symposiích. Za všechny jmenujme alespoň ze symposia *Vzdělávání v biomedicínské informatice a biomedicínské statistice* úvodní zvanou přednášku prof. A. McCray (USA): *Modelling Digital Libraries* a inspirativní přehlednou přednášku, kterou přednesla prof. E. Hovenga (Austrálie) na téma *Changing Academic Roles: New Approaches to Teaching and Learning*.

V rámci slavnostního podvečerního zasedání, které se 14. dubna konalo v Karolinu, vystoupili s poutavými a originálními přednáškami profesori Jan H. van Bemmelen, Reinhold Haux a Jean Claude Healy. Všichni řečníci ocenili nezastupitelný přínos prof. J. Zvárové jako hlavní organizátorky celé konference a zároveň vedoucí EuroMISE centra, které právě v době konání konference oslavilo 10 let od svého založení.

|                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Jiří Anděl, Karel Zvára, Statistické hodnocení nápovědy</i> .....                                                   | 1  |
| <i>Zdeněk Půlpán, Ztráta informace, způsobená restrikcí škály</i> .....                                                | 10 |
| <i>K. Doubravský, B. Maroš, L. Janíček, Analýza a modelování tvrdosti tepelně<br/>nezpracovaných šroubů M10</i> .....  | 14 |
| <i>Miroslav Hartmann, Přednáška o veřejných databázích ČSÚ</i> .....                                                   | 23 |
| <i>Marek Malý, Pracovní konference IMIA „Statistické metodologie v bioinformatice<br/>a klinických studiích“</i> ..... | 23 |

---

**Informační Bulletin** České statistické společnosti vychází čtyřikrát do roka v českém vydání.  
ISSN 1210 – 8022

Předseda společnosti: Prof. RNDr. Jaromír Antoch, CSc., KPMS MFF UK Praha, Sokolovská  
83, 186 75 Praha 8, e-mail: [jaromir.antoch@karlin.mff.cuni.cz](mailto:jaromir.antoch@karlin.mff.cuni.cz)

Redakce: Doc. RNDr. Gejza Dohnal, CSc., Jeronýmova 7, 130 00 Praha 3,  
e-mail: [gejza.dohnal@fs.cvut.cz](mailto:gejza.dohnal@fs.cvut.cz)